MATHÉMATIQUE 4e secondaire Cahier de savoirs et d'activités

MARC-ANDRÉ MORRISSEAU
MARIE-ÈVE CÔTÉ
JONATHAN BERGERON MARTIN

CORRIGÉ

# PUISSANCE 4

CST

SÉQUENCE Culture, société et technique

Conforme à la progression des apprentissages

Grand Duc en ligne

MATHÉMATIQUE 4e secondaire Cahier de savoirs et d'activités

MARC-ANDRÉ MORRISSEAU
MARIE-ÈVE CÔTÉ
JONATHAN BERGERON MARTIN

CORRIGÉ

# PUISSANCE 4

CST

Grand Duc en ligne

**REMERCIEMENTS**

Pour la vérification scientifique du manuscrit, l'Éditeur témoigne sa gratitude à M^me^ Johanne Guimont.

Pour la vérification scientifique des épreuves, l'Éditeur tient à remercier M^me^ Marie-Hélène Ste-Croix.

Pour leurs remarques, suggestions et commentaires judicieux à l'une ou l'autre des étapes d'élaboration du projet, l'Éditeur tient à remercier :

M^me^ Anne Bérubé, de la Commission scolaire des Grandes-Seigneuries ;
M^me^ Caroline Demers, de la Commission scolaire de l'Énergie ;
M^me^ Johanne Desparois, Collège Regina Assumpta ;
M^me^ Anne Girard, de la Commission scolaire De La Jonquière ;
M^me^ Mélanie Turgeon, de la Commission scolaire de la Beauce-Etchemin.

PUISSANCE 4 CST

© 2020, Éditions Grand Duc, une division du Groupe Éducalivres inc.

1699, boulevard Le Corbusier, bureau 350, Laval (Québec) H7S 1Z3
Téléphone : 514 334-8466 • Télécopie : 514 334-8387
www.grandducenligne.com

Tous droits réservés.

**CONCEPTION GRAPHIQUE (MAQUETTE INTÉRIEURE ET PAGE COUVERTURE) :** Caméléon Designer inc.
**ADAPTATION DE LA MAQUETTE ET INFOGRAPHIE :** Marquis Interscript

Financé par le gouvernement du Canada | Canada

L'usager qui a acquitté les frais de ce document **À reproduire** se voit accorder par les Éditions Grand Duc l'autorisation d'adapter le présent document et de le reproduire sous sa forme originale ou adaptée un nombre de fois qui ne dépasse pas le nombre d'élèves dans sa classe, et ce, seulement aux fins d'utilisation dans sa classe.

Code produit 4635PEN
ISBN 978-2-7655-4058-8

Dépôt légal
Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2020
Bibliothèque et Archives Canada, 2020

Imprimé au Canada
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 MI 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

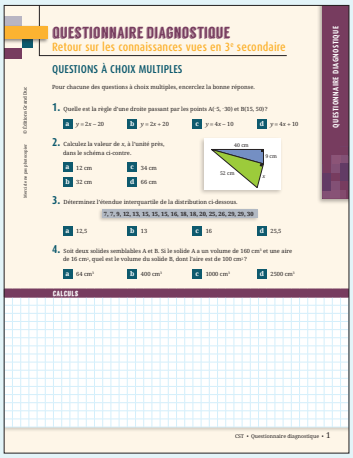
# PRÉSENTATION DE LA COLLECTION

## Le cahier *Puissance* : la force mathématique

Le cahier d'apprentissage contient tout ce que l'élève doit avoir à portée de la main en classe.

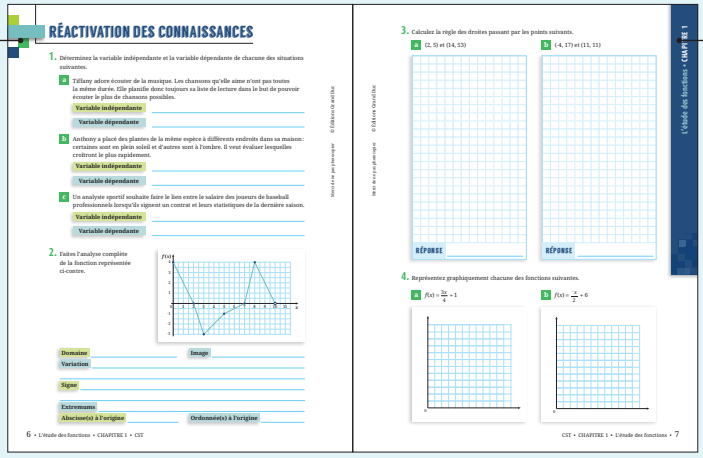
### UNE MISE À NIVEAU EN DÉBUT D'ANNÉE

Le cahier s'ouvre sur un questionnaire diagnostique portant sur des connaissances que l'élève a acquises en 3e secondaire.



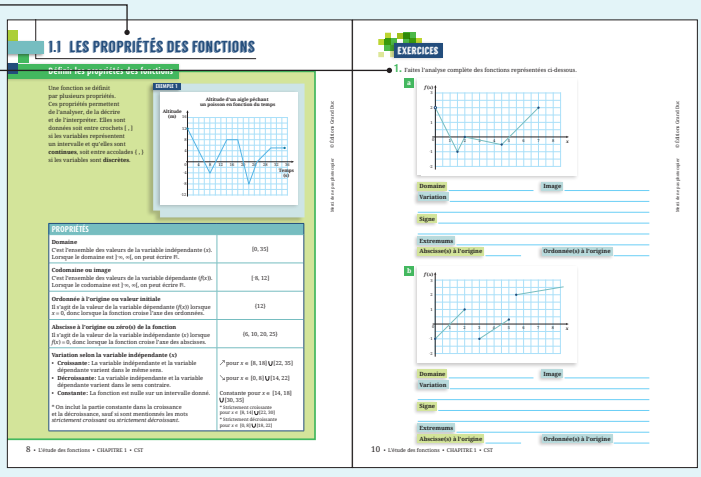

### LES CHAPITRES

Chaque chapitre débute par une **réactivation des connaissances**.




La **théorie** présente un seul concept à la fois.

Une série d'**exercices** disposés par ordre croissant de difficulté suit la théorie. Dans le corrigé, le niveau de difficulté et la longueur de la démarche de chaque exercice sont cotés. Dans tous les cas, les connaissances et processus sollicités respectent la progression des apprentissages.

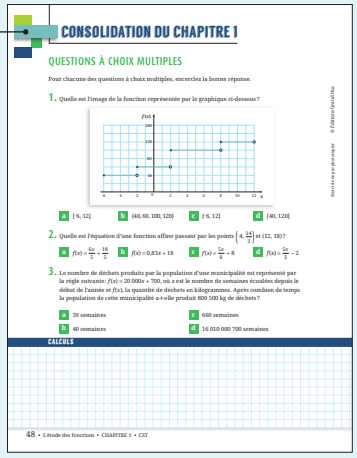



★ Niveau de difficulté facile et démarche courte

★★ Niveau de difficulté intermédiaire et démarche de longueur moyenne

★★★ Niveau de difficulté difficile et démarche longue

À la fin de chaque chapitre, l'élève est amené à réinvestir ses connaissances de différentes façons. Les exercices de **révision** sont divisés en trois sections : des questions à choix multiples, des questions à court développement et des questions à long développement.


CONSOLIDATION DU CHAPITRE 1

QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

1. Quelle est l'image de la fonction représentée par le graphique ci-dessous ?

a) [-6, 12] b) {60, 60, 100, 120} c) ]-6, 12[ d) [40, 120]

2. Quelle est l'équation d'une fonction affine passant par les points $\left(-4, \frac{14}{3}\right)$ et (12, 18) ?

a) $f(x) = \frac{6x}{5} + \frac{18}{5}$ b) $f(x) = 0{,}83x + 18$ c) $f(x) = \frac{5x}{6} + 8$ d) $f(x) = \frac{x}{3} - 2$

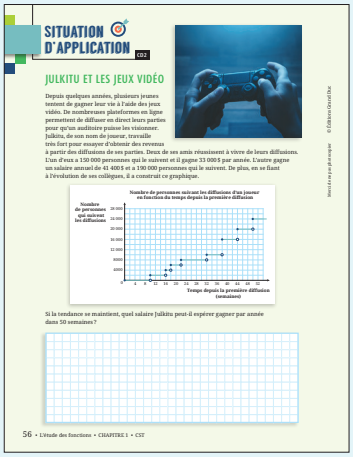
3. Le nombre de déchets produits par la population d'une municipalité est représenté par la règle suivante : $f(x) = 20\,000x + 700$, où $x$ est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'année et $f(x)$, la quantité de déchets en kilogrammes. Après combien de temps la population de cette municipalité a-t-elle produit 800 500 kg de déchets ?

a) 39 semaines c) 660 semaines
b) 40 semaines d) 16 010 000 700 semaines

CALCULS

48 • L'étude des fonctions • CHAPITRE 1 • CST

Une **situation d'application** permet à l'élève d'utiliser ses connaissances dans un contexte signifiant.


SITUATION D'APPLICATION

JULKITU ET LES JEUX VIDÉO

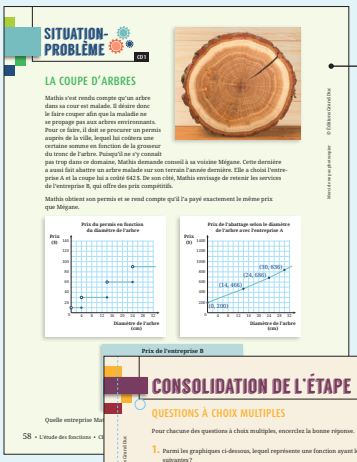
Depuis quelques années, plusieurs jeunes tentent de gagner leur vie à l'aide des jeux vidéo. De nombreuses plateformes en ligne permettent de diffuser en direct leurs parties pour qu'un auditoire puisse les visionner. Julkitu, de son nom de joueur, travaille très fort pour essayer d'obtenir des revenus à partir des diffusions de ses parties. Deux de ses amis réussissent à vivre de leurs diffusions. L'un d'eux a 150 000 personnes qui le suivent et il gagne 33 000 $ par année. L'autre gagne un salaire annuel de 41 400 $ et a 190 000 personnes qui le suivent. De plus, en se fiant à l'évolution de ses collègues, il a construit ce graphique.

Nombre de personnes suivant les diffusions d'un joueur en fonction du temps depuis la première diffusion

Si la tendance se maintient, quel salaire Julkitu peut-il espérer gagner par année dans 50 semaines ?

56 • L'étude des fonctions • CHAPITRE 1 • CST

Une **situation-problème** à la fin de chaque chapitre lui propose de réinvestir ses connaissances dans un contexte complexe et ouvert. Ayant accès à l'énoncé de la situation en tout temps, l'élève peut facilement y écrire la démarche.


SITUATION-PROBLÈME

LA COUPE D'ARBRES

Mathis n'est rendu compte qu'un arbre dans sa cour est malade. Il désire donc le faire couper afin que la maladie ne se propage pas aux arbres environnants. Pour ce faire, il doit se procurer un permis auprès de la ville, lequel lui coûtera une certaine somme en fonction de la grosseur du tronc de l'arbre. Puisqu'il ne s'y connaît pas trop dans ce domaine, Mathis demande conseil à sa voisine Mégane. Cette dernière a aussi fait abattre un arbre malade sur son terrain l'année dernière. Elle a choisi l'entreprise A et la coupe lui a coûté 642 $. De son côté, Mathis envisage de retenir les services de l'entreprise B, qui offre des prix compétitifs.

Mathis obtient son permis et se rend compte qu'il l'a payé exactement le même prix que Mégane.

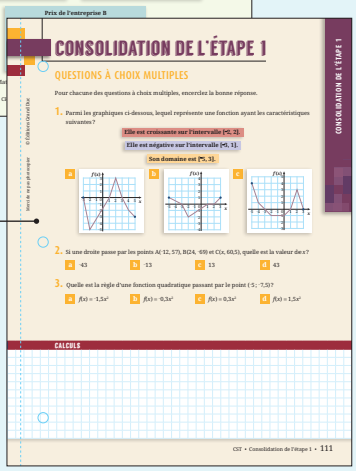
Prix du permis en fonction du diamètre de l'arbre

Prix de l'abattage selon le diamètre de l'arbre avec l'entreprise A

Prix de l'entreprise B

Quelle entreprise Ma

58 • L'étude des fonctions • CH


CONSOLIDATION DE L'ÉTAPE 1

QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

1. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel représente une fonction ayant les caractéristiques suivantes ?

Elle est croissante sur l'intervalle [-∞, 2[.
Elle est négative sur l'intervalle ]-5, 1[.
Son domaine est ]-5, 3[.

2. Si une droite passe par les points A(-12, 57), B(24, -69) et C(x, 60,5), quelle est la valeur de x ?

a) -43 b) -13 c) 13 d) 43

3. Quelle est la règle d'une fonction quadratique passant par le point (-5 ; 7,5) ?

a) $f(x) = 1{,}5x^2$ b) $f(x) = 0{,}3x^2$ c) $f(x) = 0{,}3x^2$ d) $f(x) = 1{,}5x^2$

CALCULS

CONSOLIDATION DE L'ÉTAPE 1

CST • Consolidation de l'étape 1 • 111

## RÉINVESTIR SES CONNAISSANCES À TOUT MOMENT, C'EST IMPORTANT

À la fin de chaque étape, des exercices de **consolidation** permettent à l'élève de réviser les notions relatives à plusieurs chapitres avant de poursuivre ses apprentissages. Ces exercices sont construits suivant le modèle des évaluations du Ministère.

## GRAPHISME, NOTATIONS ET SYMBOLES

Le contenu de ce cahier est conforme à la dernière mise à jour du document de référence *Graphisme, notations et symboles utilisés en mathématique au secondaire*.

## UNE RÉVISION DE FIN D'ANNÉE INTERACTIVE

À la fin de l'année, un grand nombre de concepts doivent être révisés. Des exercices en ligne sont offerts. Ils peuvent être effectués individuellement par les élèves ou projetés en groupe-classe à l'appui de l'enseignement. Il suffit d'entrer le **C O D E** à quatre caractères sur la page d'accueil de la Classe numérique.

## D'AUTRES OUTILS DISPONIBLES POUR L'ENSEIGNANT OU L'ENSEIGNANTE

- le corrigé complet présentant la totalité des démarches et offrant davantage qu'une simple réponse ;
- une version à projeter du cahier dans laquelle le corrigé apparaît ;
- une planification annuelle ;
- des évaluations : une évaluation de connaissances pour chaque chapitre, trois évaluations d'étape, et deux pratiques à l'épreuve unique ;
- des activités interactives ;
- des fiches de consolidation ;
- des situations de conjecture.

# TABLE DES MATIÈRES


**Questionnaire diagnostique** ..... 1

## ÉTAPE 1

### CHAPITRE 1

**L'étude des fonctions** ..... 5

**Réactivation des connaissances** ..... 6

**1.1 Les propriétés des fonctions** .... 8

Définir les propriétés des fonctions 8

**1.2 Les fonctions du premier degré** .. 16

Reconnaître la règle d'une fonction polynomiale du premier degré .... 16

Déterminer l'ordonnée à l'origine (*b*) d'une fonction ..... 19

**1.3 Les fonctions définies par parties** ..... 26

Représenter les fonctions définies par parties ..... 26

**1.4 Les fonctions en escalier** ..... 38

Représenter les fonctions en escalier ..... 38

Faire l'analyse des fonctions en escalier ..... 42

**Consolidation du chapitre 1** ..... 48

**Situation d'application – Julkitu et les jeux vidéo** ..... 56

**Situation-problème – La coupe d'arbres** ..... 58

**Feuille de notes** ..... 60

### CHAPITRE 2

**Les fonctions périodique, exponentielle et quadratique** ..... 61

**Réactivation des connaissances** ..... 62

**2.1 La fonction périodique** ..... 65

Reconnaître une fonction périodique ..... 65

Résoudre une situation à l'aide du graphique d'une fonction périodique ..... 67

**2.2 La fonction exponentielle** ..... 72

Définir la fonction exponentielle .. 72

Rechercher la règle d'une fonction exponentielle de base à partir de points ..... 77

Résoudre des problèmes à l'aide de la fonction exponentielle à partir d'une valeur donnée..... 79

**2.3 La fonction quadratique** ..... 86

Définir la fonction quadratique ... 86

Tracer le graphique d'une fonction quadratique ..... 91

Rechercher la règle d'une fonction quadratique ..... 92

**Consolidation du chapitre 2** ..... 97

**Situation d'application – L'héritage de Julianne** ..... 106

**Situation-problème – La quête du guerrier** ..... 108

**Feuille de notes** ..... 110

**Consolidation de l'étape 1** ..... 111

## ÉTAPE 2

### CHAPITRE 3


**La géométrie analytique** ..... 119

**Réactivation des connaissances** ..... 120

**3.1 L'équation d'une droite** ..... 122
Calculer une pente ..... 122
Déterminer l'équation d'une droite ..... 124

**3.2 La position relative de deux droites** ..... 129
Les types de droites et leur position relative ..... 129

**3.3 La distance entre deux points** ... 134
Calculer la distance entre deux points ..... 134

**3.4 Le point milieu** ..... 140
Déterminer les coordonnées du point milieu d'un segment ..... 140
Déterminer les coordonnées d'un des points situés à l'extrémité d'un segment à partir du point milieu .. 143

**3.5 Le point de partage** ..... 146
Indiquer la position d'un point de partage sur un segment ..... 146
Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon une fraction donnée ..... 148
Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon un rapport donné ..... 153

**Consolidation du chapitre 3** ..... 157

**Situation d'application – Un rallye dans le désert** ..... 166

**Situation-problème – Deux nouveaux quartiers résidentiels** ..... 168

**Feuille de notes** ..... 172


### CHAPITRE 4


**Les systèmes d'équations** ..... 173

**Réactivation des connaissances** ..... 174

**4.1 L'interprétation d'un système d'équations** ..... 176
Interpréter un système d'équations ..... 176

**4.2 La méthode de comparaison** .... 180
Utiliser la méthode de comparaison pour résoudre un système d'équations ..... 180

**4.3 La méthode de substitution** ..... 183
Utiliser la méthode de substitution pour résoudre un système d'équations ..... 183

**4.4 La méthode de réduction** ..... 186
Utiliser la méthode de réduction pour résoudre un système d'équations ..... 186
Résoudre des problèmes à l'aide de la méthode de son choix ..... 190

**4.5 Le nombre de solutions d'un système d'équations** ..... 200
Résoudre un système d'équations ..... 200

**Consolidation du chapitre 4** ..... 204

**Situation d'application – Du café artisanal** ..... 211

**Situation-problème – La collation récompense** ..... 212

**Feuille de notes** . . . . . 214

**Consolidation de l'étape 2** . . . . . 215

## ÉTAPE 3

### CHAPITRE 5

**Les similitudes et les isométries dans les triangles** . . . . . 223

**Réactivation des connaissances** . . . . . 224

**5.1 Les démonstrations** . . . . . 226

Effectuer des preuves . . . . . 226

**5.2 Les triangles semblables** . . . . . 232

Déterminer les conditions minimales de similitude des triangles. . . . . 232

Utiliser les triangles semblables dans les preuves . . . . . 236

Trouver des mesures manquantes à l'aide des triangles semblables . . 240

**5.3 Les triangles isométriques** . . . . . 245

Déterminer les conditions minimales d'isométrie des triangles. . . . . 245

Utiliser les triangles semblables dans les preuves . . . . . 249

Trouver des mesures manquantes à l'aide des triangles isométriques . . . . . 253

**5.4 Les relations métriques dans les triangles rectangles** . . . . 258

Interpréter les triangles rectangles pour trouver les relations métriques . . . . . 258

**Consolidation du chapitre 5** . . . . . 268

**Situation d'application – Mandy l'architecte** . . . . . 278

**Situation-problème – La scène de spectacle** . . . . . 280

**Feuille de note** . . . . . 282

### CHAPITRE 6

**La trigonométrie**. . . . . 283

**Réactivation des connaissances** . . . . . 284

**6.1 Les rapports trigonométriques dans les triangles rectangles** . . . . 286

Déterminer les mesures d'un côté à l'aide des rapports trigonométriques . . . . . 286

Déterminer la mesure d'un angle à l'aide des rapports trigonométriques . . . . . 289

Résoudre un triangle rectangle. . . . 292

**6.2 La loi des sinus** . . . . . 298

Déterminer les mesures d'un triangle quelconque à l'aide de la loi des sinus . . . . . 298

Résoudre un triangle quelconque . . 301

**6.3 L'aire des triangles**. . . . . 306

Déterminer l'aire d'un triangle à l'aide de la formule trigonométrique . . . . . 306

Déterminer l'aire d'un triangle à l'aide de la formule de Héron. . . . 311

**Consolidation du chapitre 6** . . . . . 315

**Situation d'application – Le toit de la maisonnette** . . . . . 323

**Situation-problème – Une terre en héritage** . . . . . 324

**Feuille de notes** . . . . . 326

CHAPITRE 7
**Les statistiques** ..... 327

**Réactivation des connaissances** ..... 328

**7.1 Les diagrammes à tige et à feuilles** ..... 334
Représenter une distribution à l'aide d'un diagramme à tige et à feuilles ..... 334

**7.2 L'écart moyen** ..... 339
Calculer l'écart moyen ..... 339

**7.3 Le rang centile** ..... 343
Calculer un rang centile ..... 343
Déterminer une donnée à partir du rang centile ..... 346

**7.4 Les tableaux à double entrée, la corrélation et les nuages de points** ..... 350
Représenter un tableau à double entrée et interpréter la corrélation ..... 350
Représenter une situation à l'aide d'un nuage de points ..... 355
Interpréter la corrélation à l'aide du coefficient de corrélation ..... 361

**7.5 Les droites de régression** ..... 369
Établir l'équation d'une droite de régression avec la méthode de Mayer ..... 369
Établir l'équation d'une droite de régression à l'aide de la méthode médiane-médiane ..... 373
Résoudre des problèmes avec la droite de régression ..... 378

**Consolidation du chapitre 7** ..... 384

**Situation d'application – Le banquet de Noël** ..... 394

**Situation-problème – Le Grand Vert** ..... 396

**Feuille de notes** ..... 398

**Consolidation de l'étape 3** ..... 399

**Révision interactive** ..... 407

**Annexe** ..... 409

# QUESTIONNAIRE DIAGNOSTIQUE

## Retour sur les connaissances vues en 3e secondaire

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

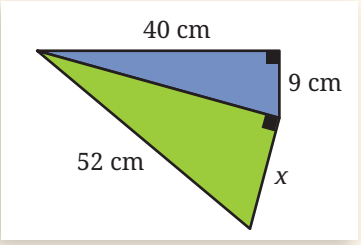
## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

**1.** Quelle est la règle d'une droite passant par les points A($^{-}5$, $^{-}30$) et B(15, 50) ?

**a** $y = 2x - 20$ **b** $y = 2x + 20$ **c** $y = 4x - 10$ **d** $y = 4x + 10$

**2.** Calculez la valeur de $x$, à l'unité près, dans le schéma ci-contre.




**a** 12 cm **c** 34 cm

**b** 32 cm **d** 66 cm

**3.** Déterminez l'étendue interquartile de la distribution ci-dessous.

**7, 7, 9, 12, 13, 15, 15, 15, 16, 18, 18, 20, 25, 26, 29, 29, 30**

**a** 12,5 **b** 13 **c** 16 **d** 25,5

**4.** Soit deux solides semblables A et B. Si le solide A a un volume de 160 cm$^3$ et une aire de 16 cm$^2$, quel est le volume du solide B, dont l'aire est de 100 cm$^2$ ?

**a** 64 cm$^3$ **b** 400 cm$^3$ **c** 1000 cm$^3$ **d** 2500 cm$^3$

## CALCULS

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

**5.** Simplifiez les expressions algébriques suivantes.

**a** $(4x - 7y + 5) \bullet (2x + 12)$

$(4x - 7y + 5) \bullet (2x + 12)$
$8x^2 + 48x - 14xy - 84y + 10x + 60$
$8x^2 + 58x - 14xy - 84y + 60$

**RÉPONSE** $8x^2 + 58x - 14xy - 84y + 60$

**b** $\dfrac{15y^3 - 5y^2 + y}{5y}$

$\dfrac{15y^3 - 5y^2 + y}{5y}$
$3y^2 - y - \dfrac{1}{5}$

**RÉPONSE** $3y^2 - y - \dfrac{1}{5}$

**c** $(5x - 12y + 8) - (4x + 3y - 9)$

$(5x - 12y + 8) - (4x + 3y - 9)$
$5x - 12y + 8 - 4x - 3y + 9$
$x - 15y + 17$

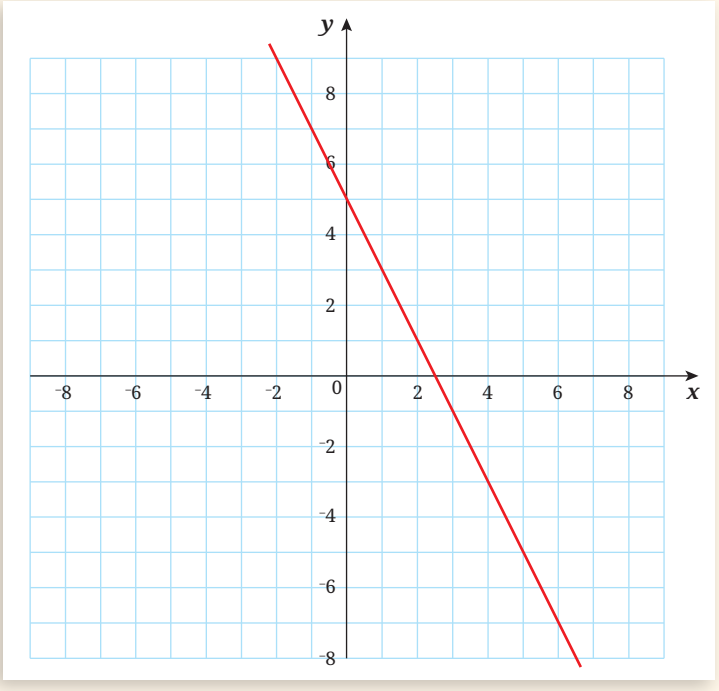
**RÉPONSE** $x - 15y + 17$

**d** $(3x - 7)^2$

$(3x - 7)^2$
$(3x - 7) \bullet (3x - 7)$
$9x^2 - 21x - 21x + 49$
$9x^2 - 42x + 49$

**RÉPONSE** $9x^2 - 42x + 49$

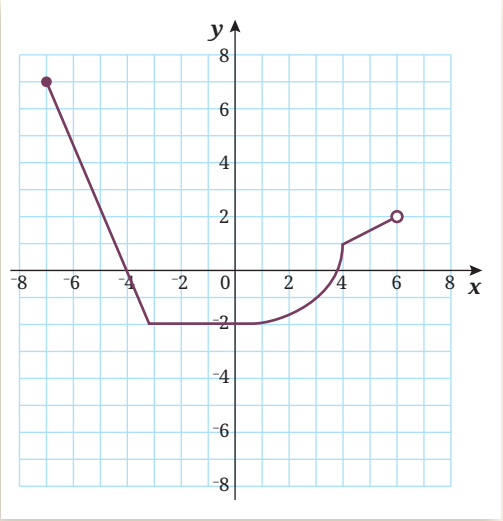
**6.** Tracez la droite dont l'équation est $y = {}^{-}2x + 5$.




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**7.** Faites l'analyse de la fonction suivante.




**Domaine** $[-7, 6[$

**Image** $[-2, 7]$

**Ordonnée à l'origine** $-2$

**Zéro(s)** $-4$ et $4$

**$f$ croissante (↗)** $[0, 6[$

**$f$ décroissante (↘)** $[-7, -3]$

**$f$ constante** $[-3, 0]$

**$f$ positive (+)** $[-7, -4] \cup [4, 6]$

**$f$ négative (−)** $[-4, 4]$

**Maximum** $7$

**Minimum** $-2$

**8.** Résolvez les inéquations suivantes.

**a** $3x - 5 \leq 13$

$3x - 5 \leq 13$
$3x \leq 18$
$x \leq 6$

**RÉPONSE** $x \leq 6$

**b** $12 - 6x > 36$

$12 - 6x > 36$
$-6x > 24$
$x < -4$

**RÉPONSE** $x < -4$

**9.** Factorisez l'expression algébrique $15x^2 - 20xy + 10x$ à l'aide de la mise en évidence simple.

PGCD $(15, -20, 10) : 5$
PGCD $(x^2, xy, x) : x$
PGCD $(15x^2, -20xy, 10x) : 5x$

$$\frac{15x^2 - 20xy + 10x}{5x} = 3x - 4y + 2$$

**RÉPONSE** $5x(3x - 4y + 2)$

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

**10.** Michael se procure quatre chandails et deux pantalons pour 170 $, alors que Jean s'achète quatre chandails et un pantalon pour 135 $. Déterminez la valeur d'un chandail et la valeur d'un pantalon. Les chandails sont tous étiquetés au même prix de même que les pantalons.

**1** Identification des inconnues
$x$ : valeur d'un chandail
$y$ : valeur d'un pantalon

**2** Équation représentant les achats de Michael
$4x + 2y = 170 \rightarrow y = {}^{-}2x + 85$

**3** Équation représentant les achats de Jean
$4x + y = 135 \rightarrow y = {}^{-}4x + 135$

**4** Résolution du système d'équations

$$\begin{aligned} {}^{-}2x + 85 &= {}^{-}4x + 135 \\ 2x + 85 &= 135 \\ 2x &= 50 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

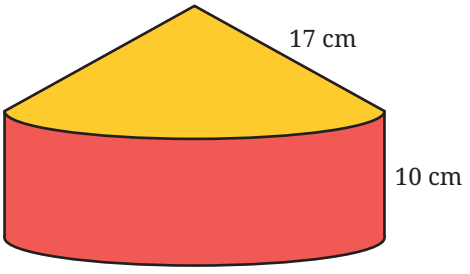
$$\begin{aligned} y &= {}^{-}2 \cdot 25 + 85 \\ y &= 35 \end{aligned}$$

**5** Vérification
$y = {}^{-}4 \cdot 25 + 135$
$y = 35$

**6** Valeur d'un chandail : 25 $
Valeur d'un pantalon : 35 $

**RÉPONSE** La valeur d'un chandail est de 25 $ et celle d'un pantalon, 35 $.

**11.** On a caché une bille dans le château de sable ci-contre. Calculez la probabilité qu'elle se trouve dans la partie conique.




**1** Mesure du rayon
$30 \div 2 = 15$ cm

**2** Volume du cylindre
$V = \pi r^2 h$
$V = \pi \cdot 15^2 \cdot 10$
$V \approx 7068{,}58$ cm$^3$

**3** Mesure de la hauteur du cône

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ a^2 + 15^2 &= 17^2 \\ a^2 + 225 &= 289 \\ a^2 &= 64 \\ a &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

**4** Volume du cône

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 8}{3}$$

$V \approx 1884{,}96$ cm$^3$

**5** Volume total
$7068{,}58 + 1884{,}96 = 8953{,}54$ cm$^3$

**6** Probabilité que la bille soit dans le cône

$$\frac{1884{,}96}{8953{,}54} \approx 0{,}21 \approx 21\,\%$$

**RÉPONSE** La probabilité que la bille soit dans le cône est de 21 %.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

1

# L'ÉTUDE DES FONCTIONS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée


| | |
|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | 6 |
| **1.1** Les propriétés des fonctions | 8 |
| **1.2** Les fonctions du premier degré | 16 |
| **1.3** Les fonctions définies par parties | 26 |
| **1.4** Les fonctions en escalier | 38 |
| **Consolidation du chapitre 1** | 48 |
| **Situation d'application – Julkitu et les jeux vidéo** | 56 |
| **Situation-problème – La coupe d'arbres** | 58 |
| **Feuille de notes** | 60 |

## À QUOI ÇA SERT ?

Les fonctions sont la meilleure façon de représenter des situations de la vie courante. En fait, dès qu'on observe le lien entre deux variables (temps, argent, quantité, etc.), on a recours aux fonctions, que ce soit dans le système de santé, où les traitements des patients et patientes reposent sur des résultats d'examens ; à la Bourse, où la fluctuation des titres est constamment évaluée ; ou même dans n'importe quelle compagnie qui offre un service basé sur le prix du service en fonction du temps nécessaire à la réalisation du travail. Même si on ne voit pas toujours la règle ou le graphique, les fonctions sont partout autour de nous et elles se trouvent au cœur de plusieurs métiers !

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

**1.** Déterminez la variable indépendante et la variable dépendante de chacune des situations suivantes.

**a** Tiffany adore écouter de la musique. Les chansons qu'elle aime n'ont pas toutes la même durée. Elle planifie donc toujours sa liste de lecture dans le but de pouvoir écouter le plus de chansons possibles.

**Variable indépendante** Durée des chansons

**Variable dépendante** Nombre de chansons

**b** Anthony a placé des plantes de la même espèce à différents endroits dans sa maison : certaines sont en plein soleil et d'autres sont à l'ombre. Il veut évaluer lesquelles croîtront le plus rapidement.

**Variable indépendante** Temps d'ensoleillement

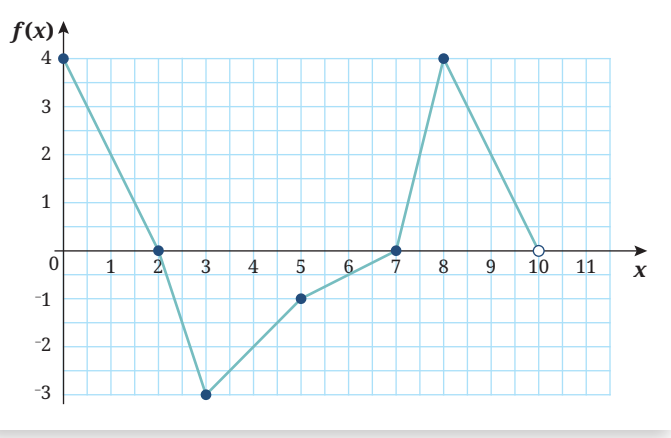
**Variable dépendante** Hauteur des plantes

**c** Un analyste sportif souhaite faire le lien entre le salaire des joueurs de baseball professionnels lorsqu'ils signent un contrat et leurs statistiques de la dernière saison.

**Variable indépendante** Statistiques de la dernière saison

**Variable dépendante** Salaire d'un joueur ($)

**2.** Faites l'analyse complète de la fonction représentée ci-contre.




**Domaine** [0, 10[ **Image** [-3, 4]

**Variation** Croissante pour $x \in [3, 8]$ et décroissante pour $x \in ]0, 3] \cup [8, 10[$

**Signe** Positive pour $x \in [0, 2] \cup [7, 10[$ et négative pour $x \in [2, 7]$

**Extremums** Maximum {4} et minimum {-3}

**Abscisse(s) à l'origine** {2, 7} **Ordonnée(s) à l'origine** {4}

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**3.** Calculez la règle des droites passant par les points suivants.

**a** (2, 5) et (14, 53)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{53 - 5}{14 - 2}$$
$$a = \frac{48}{12}$$
$$a = 4$$
$$f(x) = 4x + b$$
$$5 = 4(2) + b$$
$$5 = 8 + b$$
$$^{-}3 = b$$
$$f(x) = 4x - 3$$

**RÉPONSE** $f(x) = 4x - 3$

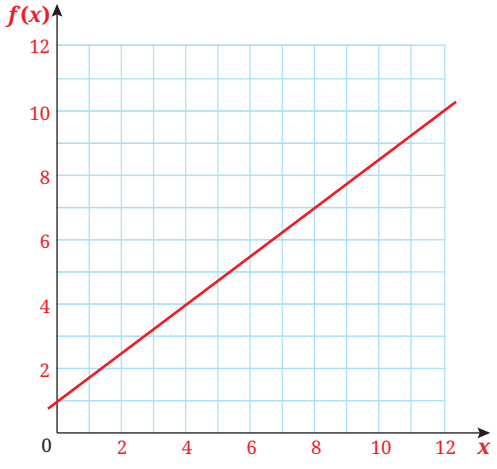
**b** ($^{-}4$, 17) et (11, 11)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{11 - 17}{11 - {}^{-}4}$$
$$a = \frac{^{-}6}{15}$$
$$a = \frac{^{-}2}{5} \text{ ou } ^{-}0{,}4$$
$$f(x) = \frac{^{-}2x}{5} + b$$
$$11 = \frac{^{-}2(11)}{5} + b$$
$$11 = \frac{^{-}22}{5} + b$$
$$\frac{77}{5} = b \text{ ou } 15{,}4 = b$$
$$f(x) = \frac{^{-}2x}{5} + \frac{77}{5} \text{ ou } f(x) = ^{-}0{,}4x + 15{,}4$$

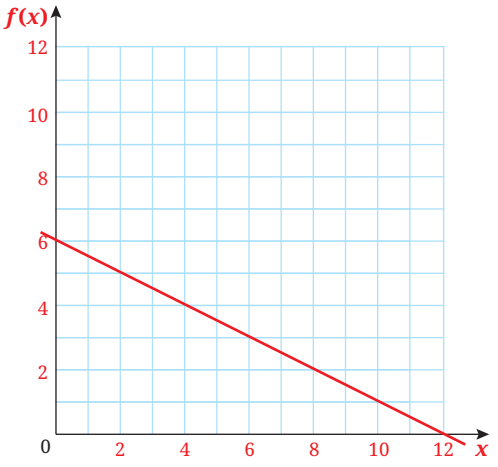
**RÉPONSE** $f(x) = \frac{^{-}2x}{5} + \frac{77}{5}$ ou $f(x) = ^{-}0{,}4x + 15{,}4$

**4.** Représentez graphiquement chacune des fonctions suivantes.

**a** $f(x) = \frac{3x}{4} + 1$




**b** $f(x) = \frac{^{-}x}{2} + 6$

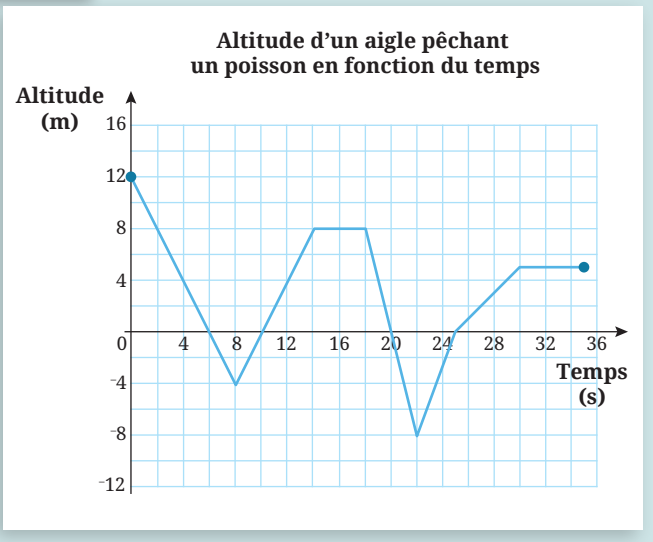


# 1.1 LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS

## Définir les propriétés des fonctions

Une fonction se définit par plusieurs propriétés. Ces propriétés permettent de l'analyser, de la décrire et de l'interpréter. Elles sont données soit entre crochets [ , ] si les variables représentent un intervalle et qu'elles sont **continues**, soit entre accolades { , } si les variables sont **discrètes**.

**EXEMPLE 1**




| PROPRIÉTÉS | |
|---|---|
| **Domaine**<br>C'est l'ensemble des valeurs de la variable indépendante ($x$). Lorsque le domaine est $]-\infty, \infty[$, on peut écrire $\mathbb{R}$. | $[0, 35]$ |
| **Codomaine ou image**<br>C'est l'ensemble des valeurs de la variable dépendante ($f(x)$). Lorsque le codomaine est $]-\infty, \infty[$, on peut écrire $\mathbb{R}$. | $[-8, 12]$ |
| **Ordonnée à l'origine ou valeur initiale**<br>Il s'agit de la valeur de la variable dépendante ($f(x)$) lorsque $x = 0$, donc lorsque la fonction croise l'axe des ordonnées. | $\{12\}$ |
| **Abscisse à l'origine ou zéro(s) de la fonction**<br>Il s'agit de la valeur de la variable indépendante ($x$) lorsque $f(x) = 0$, donc lorsque la fonction croise l'axe des abscisses. | $\{6, 10, 20, 25\}$ |
| **Variation selon la variable indépendante ($x$)**<br>• **Croissante :** La variable indépendante et la variable dépendante varient dans le même sens.<br>• **Décroissante :** La variable indépendante et la variable dépendante varient dans le sens contraire.<br>• **Constante :** La fonction est nulle sur un intervalle donné.<br><br>* On inclut la partie constante dans la croissance et la décroissance, sauf si sont mentionnés les mots *strictement croissant* ou *strictement décroissant*. | ↗ pour $x \in [8, 18] \cup [22, 35]$<br><br>↘ pour $x \in [0, 8] \cup [14, 22]$<br><br>Constante pour $x \in [14, 18] \cup [30, 35]$<br>* Strictement croissante pour $x \in [8, 14] \cup [22, 30]$<br>* Strictement décroissante pour $x \in [0, 8] \cup [18, 22]$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

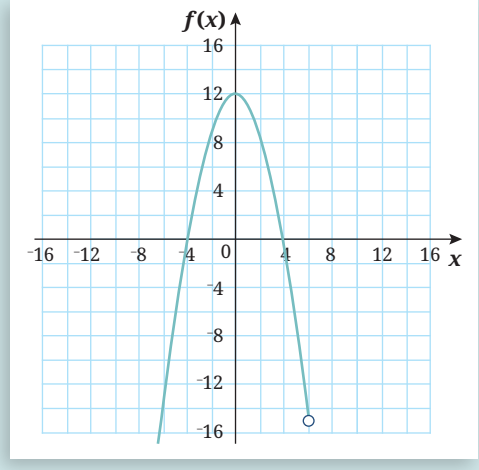
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## PROPRIÉTÉS (*suite*)

| | |
|---|---|
| **Signes**<br>• **Positive :** valeur de la variable indépendante ($x$) lorsque la variable dépendante est positive, c'est-à-dire au-dessus de l'axe des $x$ ou sur cet axe.<br>• **Négative :** valeur de la variable indépendante ($x$) lorsque la variable dépendante est négative, c'est-à-dire en dessous de l'axe des $x$ ou sur cet axe. | + pour $x \in [0, 6] \cup [10, 20] \cup [25, 35]$<br>⁻ pour $x \in [6, 10] \cup [20, 25]$ |
| **Extremums**<br>• **Maximum :** valeur maximale de la variable dépendante ($f(x)$).<br>• **Minimum :** valeur minimale de la variable dépendante ($f(x)$).<br>Si le codomaine de la fonction tend vers $\infty$, il n'y aura pas de maximum. Si le codomaine de la fonction tend vers $^{-}\infty$, il n'y aura pas de minimum. | Maximum : {12}<br>Minimum : {⁻8} |

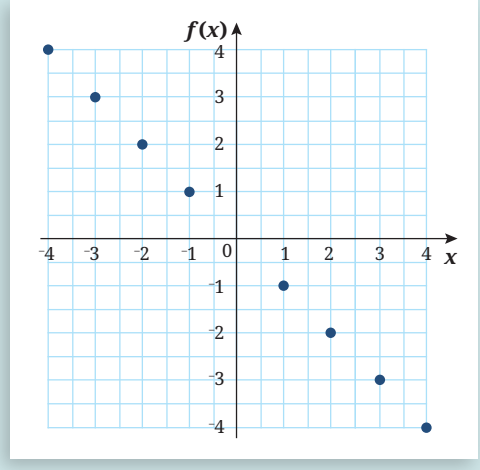
Un point fermé signifie que la donnée est **incluse** et un point ouvert, que la donnée est **exclue**. Si elle continue à l'extérieur du graphique, on dit que la fonction tend vers l'infini.

**EXEMPLE 2**




**Domaine :** $]^{-}\infty, 6[$
**Image :** $]^{-}\infty, 12]$
**Ordonnée à l'origine :** {12}
**Zéro(s) :** {⁻4, 4}
↗ pour $x \in ]^{-}\infty, 0]$
↘ pour $x \in [0, 6[$
**Variation constante :** jamais
+ pour $x \in [^{-}4, 4]$
⁻ pour $x \in ]^{-}\infty, ^{-}4] \cup [4, 6[$
**Maximum :** {12}
**Minimum :** aucun

**EXEMPLE 3**

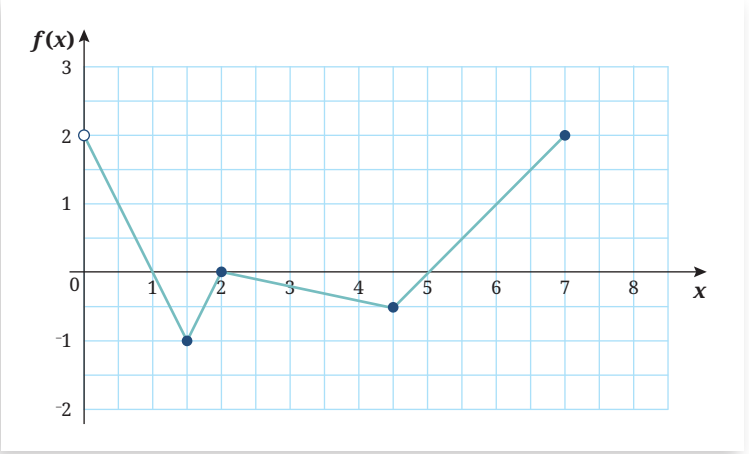



**Domaine :** {⁻4, ⁻3, ⁻2, ⁻1, 0, 1, 2, 3, 4}
**Image :** {⁻4, ⁻3, ⁻2, ⁻1, 0, 1, 2, 3, 4}
**Ordonnée à l'origine :** {0}
**Zéro(s) :** {0}
↗ jamais
↘ sur tout son domaine
**Variation constante :** jamais
+ pour $x \in$ {⁻4, ⁻3, ⁻2, ⁻1, 0}
⁻ pour $x \in$ {0, 1, 2, 3, 4}
**Maximum :** {4}
**Minimum :** {⁻4}

# EXERCICES

**1.** Faites l'analyse complète des fonctions représentées ci-dessous.

**a**




**Domaine** ]0, 7] **Image** [-1, 2]

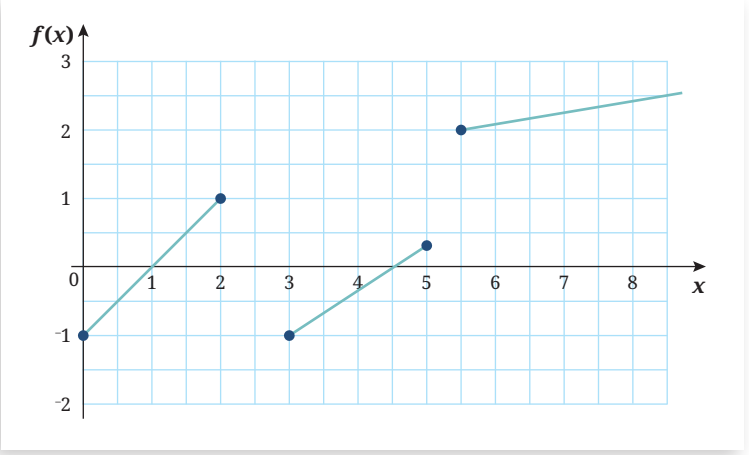
**Variation** Croissante pour $x \in [1{,}5\,;\,2] \cup [4{,}5\,;\,7]$ et décroissante pour $x \in ]0\,;\,1{,}5] \cup [2\,;\,4{,}5]$

**Signe** Positive pour $x \in ]0,\,1] \cup [5,\,7]$ et négative pour $x \in [1,\,5]$

**Extremums** Maximum {2} et minimum {-1}

**Abscisse(s) à l'origine** {1, 2, 5} **Ordonnée(s) à l'origine** Aucune

**b**




**Domaine** $[0, 2] \cup [3, 5] \cup [5{,}5\,;\,\infty[$ **Image** $[-1, 1] \cup [2, \infty[$

**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive pour $x \in [1, 2] \cup [4{,}5\,;\,5] \cup [5{,}5\,;\,\infty[$ et négative pour $x \in [0, 1] \cup [3\,;\,4{,}5]$

**Extremums** Pas de maximum et minimum {-1}

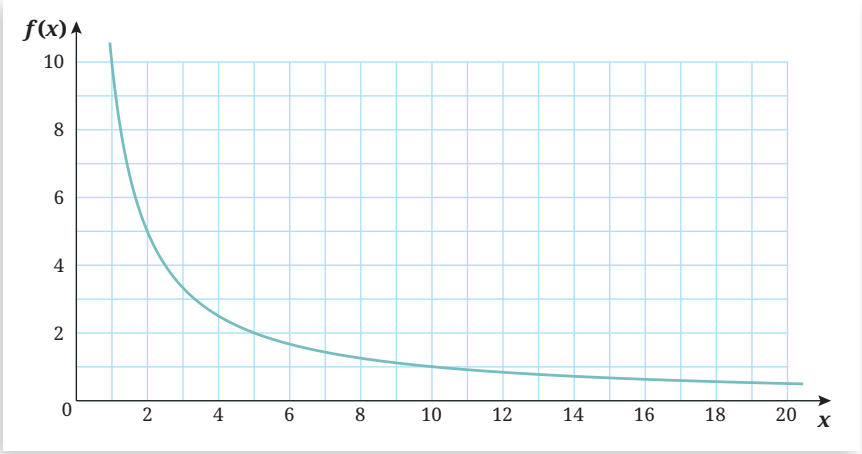
**Abscisse(s) à l'origine** {1 ; 4,5} **Ordonnée(s) à l'origine** {-1}

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



**c**




**Domaine** ]0, ∞[ **Image** ]0, ∞[

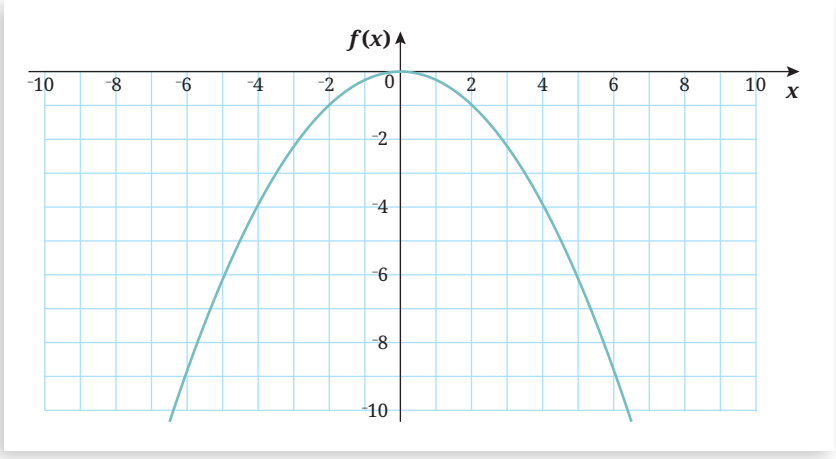
**Variation** Décroissante sur le domaine

**Signe** Positive sur le domaine

**Extremums** Pas de maximum ni de minimum

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune **Ordonnée(s) à l'origine** Aucune

**d**




**Domaine** $x \in \mathbb{R}$ **Image** $]-\infty, 0]$

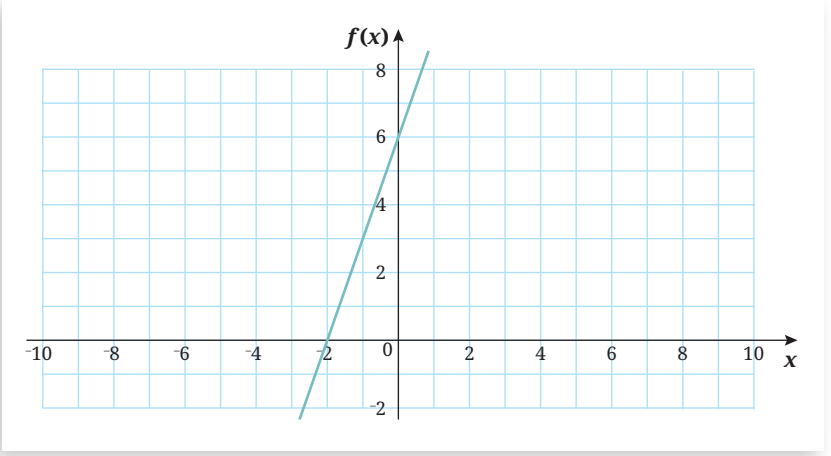
**Variation** Croissante pour $x \in ]-\infty, 0]$ et décroissante pour $x \in [0, \infty[$

**Signe** Négative sur le domaine

**Extremums** Pas de minimum et maximum {0}

**Abscisse(s) à l'origine** {0} **Ordonnée(s) à l'origine** {0}

**e**




**Domaine** $x \in \mathbb{R}$ **Image** $x \in \mathbb{R}$

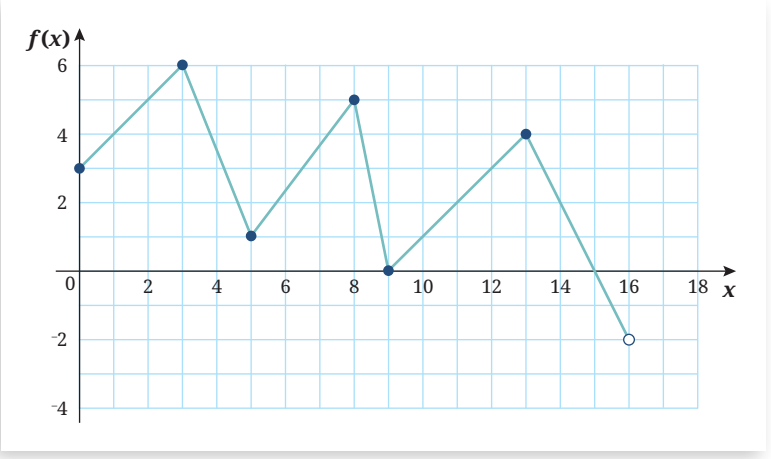
**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive pour $x \in [-2, \infty[$ et négative pour $x \in ]-\infty, -2]$

**Extremums** Pas de maximum ni de minimum

**Abscisse(s) à l'origine** $\{-2\}$ **Ordonnée(s) à l'origine** $\{6\}$

**f**




**Domaine** $[0, 16[$ **Image** $]-2, 6]$

**Variation** Croissante pour $x \in [0, 3] \cup [5, 8] \cup [9, 13]$

et décroissante pour $x \in [3, 5] \cup [8, 9] \cup [13, 16[$

**Signe** Positive pour $x \in [0, 15]$ et négative pour $x \in [15, 16[$

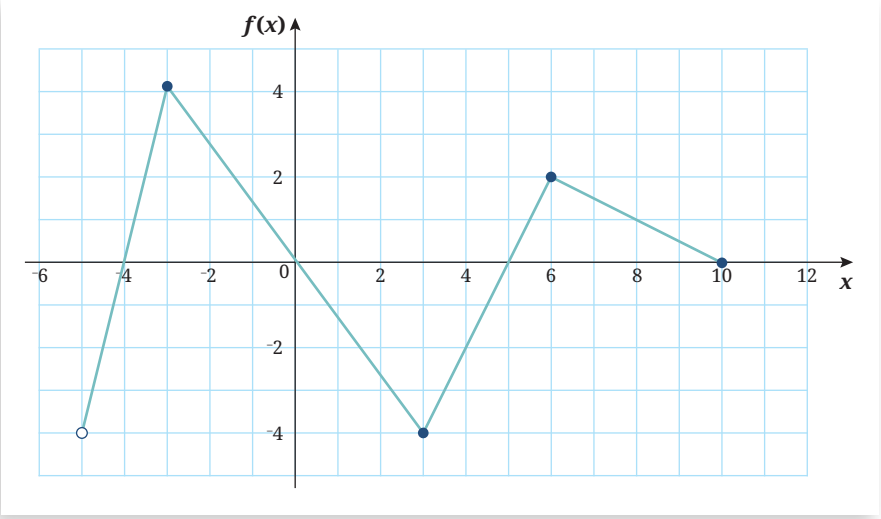
**Extremums** Pas de minimum et maximum $\{6\}$

**Abscisse(s) à l'origine** $\{9, 15\}$ **Ordonnée(s) à l'origine** $\{3\}$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**2.** Répondez aux questions en vous référant à la fonction représentée ci-dessous.




**a** Quels sont les extremums de cette fonction ?

Le maximum est 4 et le minimum est ⁻4.

**b** Pour quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle croissante et négative ?

]⁻5, ⁻4] ∪ [3, 5]

**c** Pour quel(s) intervalle(s) la fonction est-elle décroissante et positive ?

[⁻3, 0] ∪ [6, 10]

**d** Quel est le domaine et quelle est l'image de la fonction ?

**Domaine** ]⁻5, 10]  **Image** [⁻4, 4]

**3.** ★★ Coralie se rend tous les matins au travail en auto. Elle part de chez elle à 7 h. À 7 h 20, elle s'arrête pour acheter un café dans un dépanneur situé à 15 km de sa maison. Elle roule ensuite 5 km de plus pour aller déposer ses deux enfants à la garderie. Finalement, elle arrive au travail à 8 h après avoir parcouru 45 km au total. Sur le chemin du retour, elle arrête uniquement chercher ses enfants à la garderie. Elle arrive à la maison à 17 h. En utilisant le temps écoulé (en heures) depuis que Coralie a quitté la maison comme variable indépendante et la distance qu'elle a parcourue en auto comme variable dépendante, répondez aux questions suivantes.

**a** Quel est le domaine de cette fonction ?

Le domaine est [0, 10].

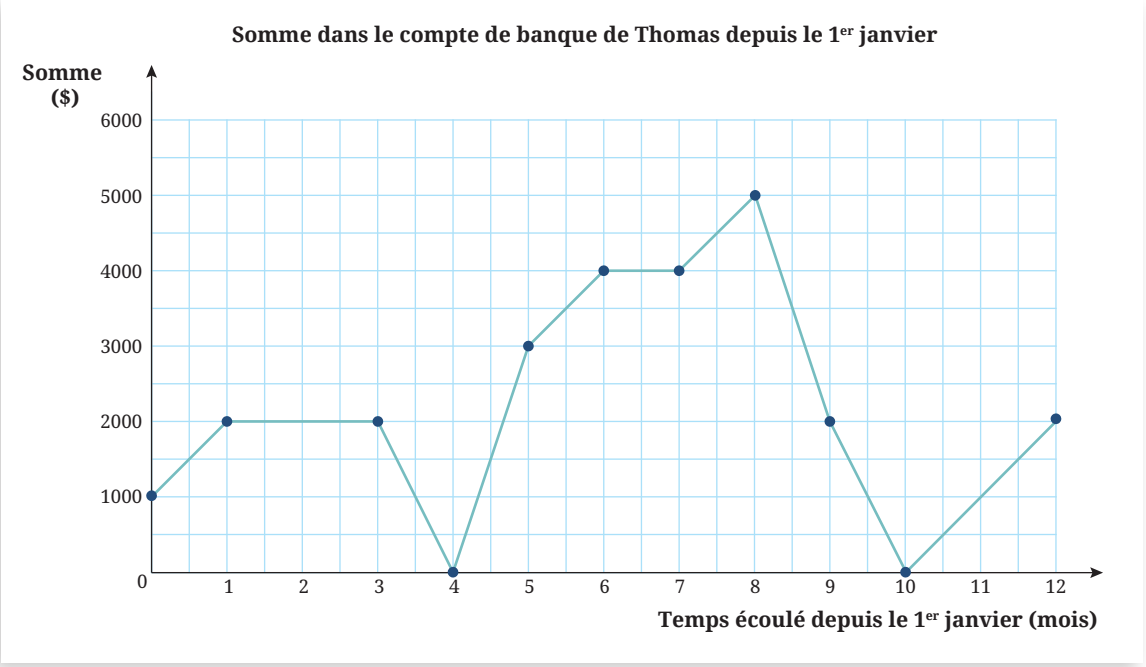
**b** Quelle est l'image de cette fonction ?

L'image est [0, 90].

**c** Quel est l'intervalle de croissance ?

L'intervalle de croissance est [0, 10].

★★ **4.** Le graphique suivant représente la somme disponible dans le compte de banque de Thomas le premier jour de chaque mois depuis le 1er janvier.




**a** Quelle est l'image et que représente-t-elle dans le contexte ?

L'image est [0, 5000]. Elle représente une variation de 0 $ à 5000 $ dans le compte de banque de Thomas durant 12 mois (ou une réponse similaire).

**b** Identifiez la ou les abscisses à l'origine et expliquez ce qu'elles représentent dans le contexte.

Les abscisses à l'origine sont 4 et 10, ce qui signifie que le premier jour du 4e et du 10e mois, Thomas n'avait plus d'argent dans son compte de banque (ou une réponse similaire).

**c** Quel est le signe de cette fonction et que signifie-t-il dans le contexte ?

La fonction est positive sur le domaine. Elle signifie que, tout le long de l'année, Thomas n'a accumulé aucune dette et que le solde de son compte n'a jamais été inférieur à 0 $ (ou une réponse similaire).

**d** Quels sont les intervalles de décroissance de cette fonction et que signifient-ils dans le contexte ?

Les intervalles de décroissance sont [3, 4] et [8, 10]. Ils signifient qu'entre le 3e et le 4e mois ainsi qu'entre le 8e et le 10e mois, la somme disponible dans le compte de banque de Thomas a diminué (ou une réponse similaire).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **5.** Représentez graphiquement une fonction ayant les caractéristiques suivantes.

**Elle possède un maximum, mais pas de minimum.**

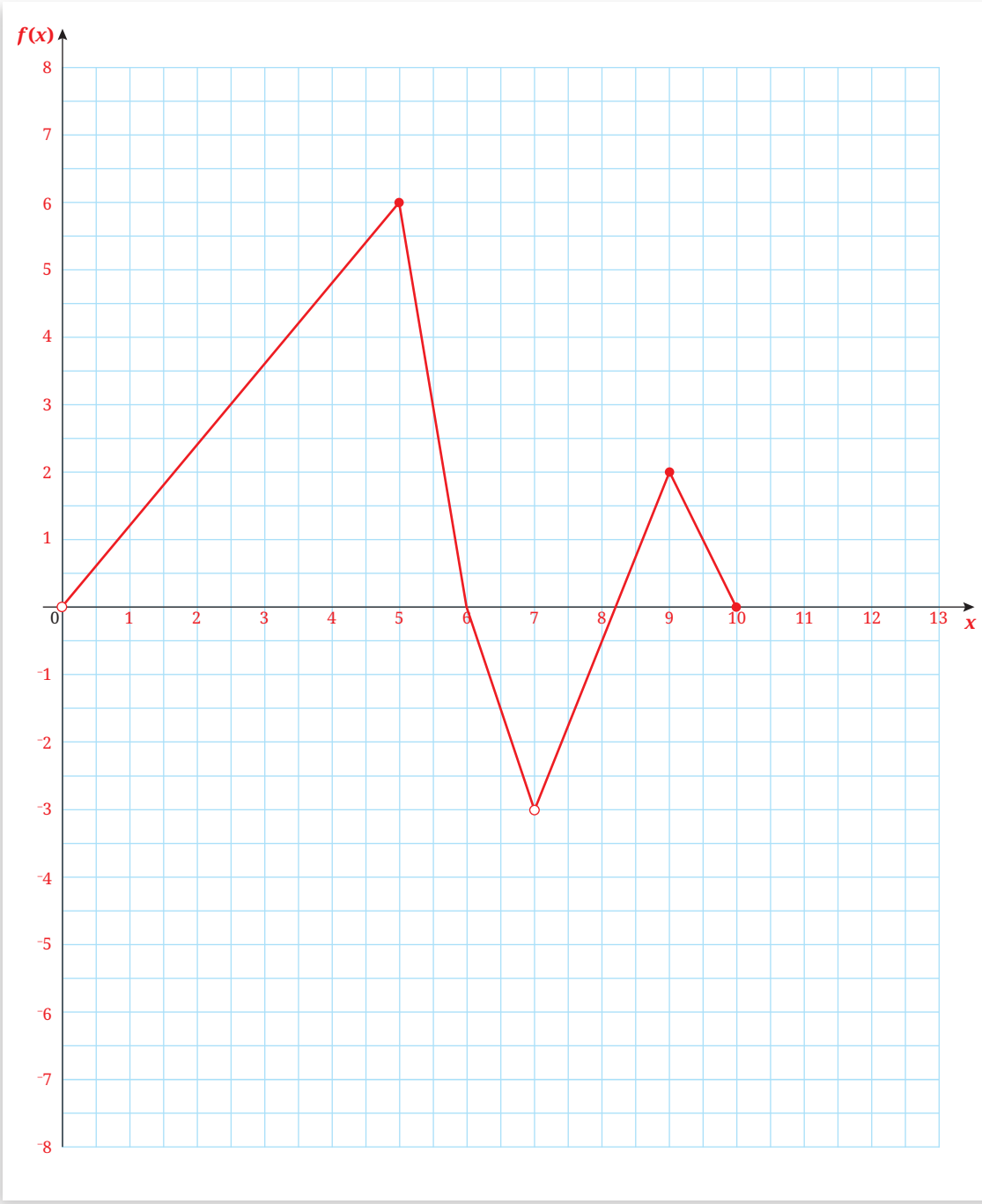
**Elle possède trois abscisses à l'origine, mais pas d'ordonnée à l'origine.**

**Son domaine est ]0, 10].**

**Elle est positive sur l'intervalle [0, 6].**

**Elle est décroissante sur l'intervalle [5, 7[.**

Plusieurs réponses possibles.



# 1.2 LES FONCTIONS DU PREMIER DEGRÉ

## Reconnaître la règle d'une fonction polynomiale du premier degré

Les fonctions polynomiales de degré 1 sont représentées par une droite dans le plan cartésien. Chaque droite peut également être représentée par une table de valeurs ou une équation, qu'on nomme aussi « règle ». La règle est considérée comme un mode de représentation d'une relation.

- La règle d'une droite s'écrit sous la forme suivante.

$$f(x) = ax + b$$

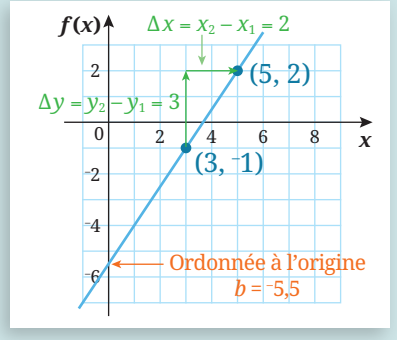
où $x$ est la variable indépendante, $f(x)$ est la variable dépendante, $a$ est le taux de variation et $b$ est l'ordonnée à l'origine.

- Le taux de variation $a$ indique de quelle façon la variable dépendante ($y$) varie selon la variable indépendante ($x$). On s'intéresse donc à la variation des ordonnées ($y$) en fonction de la variation des abscisses ($x$). Pour calculer le taux de variation ($a$) d'une droite, il faut connaître les coordonnées de deux points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ appartenant à cette droite. On peut ensuite calculer le taux de variation à l'aide de la formule suivante.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- L'ordonnée à l'origine ($b$) est la valeur de $f(x)$ lorsque $x = 0$. Elle correspond à la valeur de la variable dépendante ($y$) lorsque la droite croise l'axe des ordonnées. C'est la valeur initiale.

**EXEMPLE**




| | |
|---|---|
| **1.** Identifier deux points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ appartenant à la droite. | $x_1$ $y_1$ $x_2$ $y_2$<br>(3, ⁻1) et (5, 2) |
| **2.** Les remplacer par leur valeur respective dans la formule qui permet de calculer le taux de variation. | $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - {}^{-}1}{5 - 3} = \frac{3}{2}$ |
| **3.** Écrire la réponse. | $a = \frac{3}{2}$<br>L'ordonnée varie de 3 pendant que l'abscisse varie de 2. Le taux de variation est donc $\frac{3}{2}$. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

**1.** Quel est le taux de variation des fonctions passant par les points suivants ?

**a** (3, 8) et (15, 44)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{44 - 8}{15 - 3}$

$a = \dfrac{36}{12}$

$a = 3$

**RÉPONSE** $a = 3$

**b** (7, 21) et (13, 26)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{26 - 21}{13 - 7}$

$a = \dfrac{5}{6}$ ou $0,8\overline{3}$

**RÉPONSE** $a = \dfrac{5}{6}$ ou $0,8\overline{3}$

**c** $(^-15, ^-34)$ et $(^-6, ^-40)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{^-40 - ^-34}{^-6 - ^-15}$

$a = \dfrac{^-6}{9}$

$a = \dfrac{^-2}{3}$ ou $a = ^-0,\overline{6}$

**RÉPONSE** $a = \dfrac{^-2}{3}$ ou $a = ^-0,\overline{6}$

**d** $(^-7, 5)$ et $(9, ^-3)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{^-3 - 5}{9 - ^-7}$

$a = \dfrac{^-8}{16}$

$a = \dfrac{^-1}{2}$ ou $^-0,5$

**RÉPONSE** $a = \dfrac{^-1}{2}$ ou $^-0,5$

**e** $(^-8, 12)$ et $(0, 0)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{0 - 12}{0 - ^-8}$

$a = \dfrac{^-12}{8}$

$a = \dfrac{^-3}{2}$ ou $^-1,5$

**RÉPONSE** $a = \dfrac{^-3}{2}$ ou $^-1,5$

**f** (12,5 ; 16) et (17 ; 29,5)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{29,5 - 16}{17 - 12,5}$

$a = \dfrac{13,5}{4,5}$

$a = 3$

**RÉPONSE** $a = 3$

**2.** Écrivez la règle et précisez quelles sont les variables dans chacune des situations suivantes.

**a** Karelle est électricienne. Chaque fois qu'elle se rend chez un client ou une cliente, elle demande 100 $ pour couvrir ses frais de déplacement. Ensuite, elle demande 75 $ pour chaque heure de travail qu'elle effectue.

$f(x) = 75x + 100$, où $f(x)$ est son salaire ($) et $x$ le nombre d'heures de travail.

**b** Alexandre est un plongeur olympique. Sa spécialité est l'épreuve individuelle au 10 m. Il s'élance donc de la plateforme située à 10 m au-dessus de l'eau et il maintient une vitesse de 4 m par secondes dans sa descente.

$f(x) = -4x + 10$, où $f(x)$ est sa hauteur (m) et $x$ le temps écoulé depuis son saut (s).

**c** Dimitri est producteur agricole. À l'aide de ses collègues, il réussit à ramasser 250 casseaux de framboises par jour dans son champ.

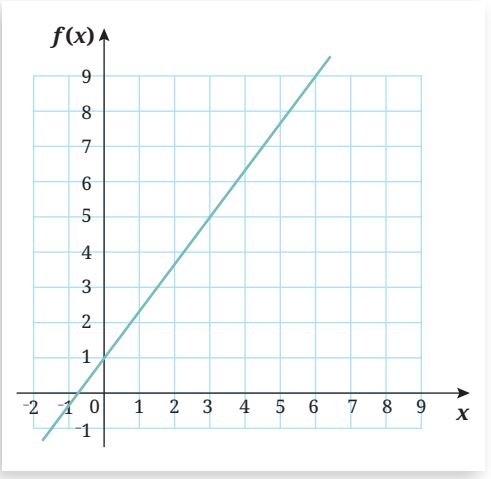
$f(x) = 250x$, où $f(x)$ est le nombre de casseaux de framboises et $x$ le nombre de jours.

**d** Megan travaille dans un magasin de jeux de société. Chaque semaine, elle touche un salaire de 500 $. De plus, elle reçoit une commission de 5 % sur tous les jeux qu'elle vend.

$f(x) = 0{,}05x + 500$, où $f(x)$ est son salaire par semaine ($) et $x$ le montant de ses ventes ($).

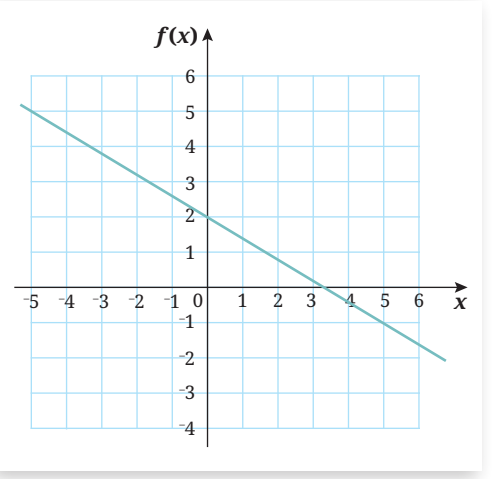
**3.** Déterminez la règle de chacune des fonctions suivantes.

**a**




$f(x) = \frac{4}{3} + 1$

**b**




$f(x) = \frac{-3}{5} + 2$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Déterminer l'ordonnée à l'origine ($b$) d'une fonction

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine ($b$) d'une fonction, il est possible de se fier au graphique. Par contre, la méthode la plus efficace est la méthode algébrique.

Afin d'utiliser la méthode algébrique pour trouver la valeur de $b$, on doit :

- calculer le taux de variation et le remplacer par sa valeur dans l'équation ;
- choisir les coordonnées $(x, y)$ d'un point appartenant à la droite, les remplacer par leur valeur dans l'équation et isoler la variable $b$.

**EXEMPLE**

**Déterminer la règle de la droite qui passe par les points (7, 21) et (11, 37).**

| | |
|---|---|
| **1.** Calculer le taux de variation ($a$) avec les points $\overset{x_1}{(7}, \overset{y_1}{21})$ et $\overset{x_2}{(11}, \overset{y_2}{37})$. | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>$a = \frac{37 - 21}{11 - 7} = \frac{16}{4} = 4$<br>$a = 4$ |
| **2.** Remplacer le taux de variation par sa valeur dans la règle $f(x) = ax + b$. | $f(x) = 4x + b$ |
| **3.** Dans cette règle, remplacer $x$ et $f(x)$ par les coordonnées d'un des deux points de départ. | Soit le point suivant : $(\overset{x}{7}, \overset{f(x)}{21})$.<br>$21 = 4(7) + b$ |
| **4.** Isoler l'ordonnée à l'origine ($b$). | $21 = 28 + b$<br>$-7 = b$ |
| **5.** Réécrire l'équation de départ en remplaçant le taux de variation et l'ordonnée à l'origine par leur valeur respective.<br>Toujours réduire les fractions, si possible. | $f(x) = 4x - 7$ |

Lorsqu'on connaît la valeur de $x$, par exemple $x = 4$, et qu'on veut calculer la valeur de $f(x)$, on écrit :

**Calculer $f(4)$.**

Cela revient à remplacer $x$ par 4 dans la règle et à calculer le résultat.

**EXEMPLE**

**Calculer $f(4)$ avec la règle.**

$f(x) = 4x - 7$
$f(4) = 4(4) - 7$
$f(4) = 9$

Lorsqu'on a une valeur de $f(x)$, par exemple $f(x) = 4$, et qu'on veut calculer la valeur de $x$, on remplace $f(x)$ par 4 dans la règle et on isole la variable $x$.

**EXEMPLE**

**Calculer la valeur de $x$ lorsque $f(x) = 4$ avec la règle $f(x) = 4x - 7$.**

$$4 = 4x - 7$$
$$\frac{11}{4} = \frac{4x}{4}$$
$$2{,}75 = x$$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

## EXERCICES

★**1.** Déterminez les règles des fonctions affines passant par les points suivants.

**a** (7, 4) et (11, 7)

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{7 - 4}{11 - 7}$

$a = \frac{3}{4}$ ou $a = 0{,}75$

**2** $f(x) = \frac{3x}{4} + b$

**3** $4 = \frac{3(7)}{4} + b$

**4** $4 = \frac{21}{4} + b$

$\frac{-5}{4} = b$ ou $-1{,}25 = b$

**5** $f(x) = \frac{3x}{4} - \frac{5}{4}$ ou $f(x) = 0{,}75x - 1{,}25$

**RÉPONSE** $f(x) = \frac{3x}{4} - \frac{5}{4}$ ou $f(x) = 0{,}75x - 1{,}25$

**b** $(-8, 31)$ et $(13, -11)$

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{-11 - 31}{13 - -8}$

$a = \frac{-42}{21}$

$a = -2$

**2** $f(x) = -2x + b$

**3** $31 = -2(-8) + b$

**4** $31 = 16 + b$

$15 = b$

**5** $f(x) = -2x + 15$

**RÉPONSE** $f(x) = -2x + 15$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## ★2. Quelle est l'équation de chaque fonction représentée ci-dessous ?

**a**

| $x$ | 6 | 10 | 13 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 10 | 12 | 13,5 | 17,5 |

**1** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{12 - 10}{10 - 6}$

$a = \dfrac{2}{4}$

$a = \dfrac{1}{2}$ ou $a = 0{,}5$

**2** $f(x) = \dfrac{\square}{2} + b$

**3** $10 = \dfrac{6}{2} + b$

**4** $10 = 3 + b$

$7 = b$

**5** $f(x) = \dfrac{\square}{2} + 7$ ou $f(x) = 0{,}5x + 7$

**RÉPONSE** $f(x) = \dfrac{\square}{2} + 7$ ou $f(x) = 0{,}5x + 7$

**b**

| $x$ | $^-4$ | 1 | 7 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 25 | 10 | $^-8$ | $^-20$ |

**1** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{10 - 25}{1 - {}^-4}$

$a = \dfrac{^-15}{5}$

$a = {}^-3$

**2** $f(x) = {}^-3x + b$

**3** $10 = {}^-3(1) + b$

**4** $10 = {}^-3 + b$

$13 = b$

**5** $f(x) = {}^-3x + 13$

**RÉPONSE** $f(x) = {}^-3x + 13$

## ★3. Déterminez la valeur demandée pour chacune des fonctions suivantes.

**a** Si $f(x) = {}^-4x + 6$, $f(8) = ?$

$f(8) = {}^-4(8) + 6$

$f(8) = {}^-32 + 6$

$f(8) = {}^-26$

**RÉPONSE** $f(8) = {}^-26$

**b** Si $f(2) = \dfrac{2\square}{3} - 16$, $x = ?$

$2 = \dfrac{2\square}{3} - 16$

$18 = \dfrac{2\square}{3}$

$54 = 2x$

$27 = x$

**RÉPONSE** $x = 27$

★**4.** Déterminez l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes.

**a** $f(x) = 4x + 2$

**1** Abscisse à l'origine

$0 = 4x + 2$

$-2 = 4x$

$\frac{-1}{2} = x$ ou $-0{,}5 = x$

**2** Ordonnée à l'origine

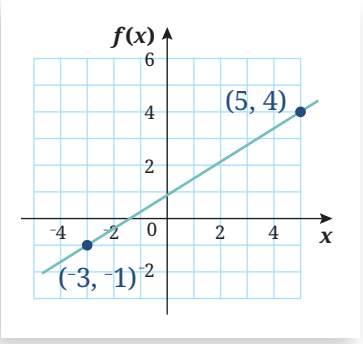
$f(0) = 4(0) + 2$

$f(0) = 0 + 2$

$f(0) = 2$

**RÉPONSE** L'abscisse à l'origine est $\frac{-1}{2}$ ou $-0{,}5$ et l'ordonnée à l'origine est 2.

**b**




**1** Règle de la fonction

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{4 - -1}{5 - -3}$

$a = \frac{5}{8}$ ou $a = 0{,}625$

$f(x) = \frac{5x}{8} + b$

$4 = \frac{5(5)}{8} + b$

$4 = \frac{25}{8} + b$

$\frac{7}{8} = b$ ou $0{,}875 = b$

$f(x) = \frac{5x}{8} + \frac{7}{8}$ ou $f(x) = 0{,}625x + 0{,}875$

**2** Abscisse à l'origine

$0 = \frac{5x}{8} + \frac{7}{8}$

$\frac{-7}{8} = \frac{5x}{8}$

$-7 = 5x$

$\frac{-7}{5} = x$ ou $-1{,}4 = x$

**3** Ordonnée à l'origine

$f(0) = \frac{5(0)}{8} + \frac{7}{8}$

$f(0) = 0 + \frac{7}{8}$

$f(0) = \frac{7}{8}$ ou $f(0) = 0{,}875$

**RÉPONSE** L'abscisse à l'origine est $\frac{-7}{5}$ ou $-1{,}4$ et l'ordonnée à l'origine est $\frac{7}{8}$ ou 0,875.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**5.** Arthur aime beaucoup jouer au golf. Dernièrement, il a remarqué un lien entre le nombre de coups qu'il jouait dans ses rondes et le nombre de coups roulés qu'il effectuait. Lors des deux dernières rondes, il a joué 86 et 81 coups au total. Lors de ces mêmes rondes, il a effectué respectivement 34 et 31 coups roulés. S'il fait 40 coups roulés lors de sa prochaine ronde, combien de coups au total Arthur devrait-il jouer ?

**1** Règle de la fonction

(86, 34) et (81, 31)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{31 - 34}{81 - 86}$$

$$a = \frac{^-3}{^-5}$$

$$a = \frac{3}{5} \text{ ou } a = 0{,}6$$

$$f(x) = \frac{3x}{5} + b$$

$$31 = \frac{3(81)}{5} + b$$

$$31 = \frac{243}{5} + b$$

$$\frac{^-88}{5} = b \text{ ou } ^-17{,}6 = b$$

$$f(x) = \frac{3x}{5} - \frac{88}{5} \text{ ou } f(x) = 0{,}6x - 17{,}6$$

**2** Nombre de coups au total pour 40 coups roulés

$$f(x) = 0{,}6x - 17{,}6$$
$$40 = 0{,}6x - 17{,}6$$
$$57{,}6 = 0{,}6x$$
$$96 = x$$

**RÉPONSE** S'il fait 40 coups roulés lors de sa prochaine ronde, Arthur devrait jouer 96 coups au total.

★★**6.** Au printemps dernier, Béatrice et Émilie ont décidé de faire leur part pour l'environnement en ramassant les déchets laissés sur un terrain durant l'hiver. Au total, les deux amies ont mis chacune 16 heures pour effectuer cette corvée. Au bout de 3 heures, Béatrice avait 270 déchets de ramassés et, au bout de 7 heures, elle en avait 630. De son côté, Émilie a ramassé en moyenne 185 déchets par heure et elle est arrivée avec un sac rempli de 210 déchets qu'elle avait ramassés plus tôt dans la semaine. Au total, combien de déchets Béatrice et Émilie ont-elles ramassés ensemble ?

**1** Règle représentant le nombre de déchets ramassés par Béatrice
(3, 270) et (7, 630)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{630 - 270}{7 - 3}$$

$$a = \frac{360}{4}$$

$$a = 90$$

$f(x) = 90x + b$
$270 = 90(3) + b$
$270 = 270 + b$
$0 = b$
$f(x) = 90x$

**2** Nombre de déchets ramassés par Béatrice
$f(16) = 90(16)$
$f(16) = 1440$

**3** Règle d'Émilie
$f(x) = 185x + 210$

**4** Nombre de déchets ramassés par Émilie
$f(16) = 185(16) + 210$
$f(16) = 2960 + 210$
$f(16) = 3170$

**5** Nombre de déchets ramassés au total par les deux amies
$1440 + 3170 = 4610$

**RÉPONSE** Ensemble, Béatrice et Émilie ont ramassé 4610 déchets.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **7.** Simon et René effectuent une course à la nage. Leur but est de parcourir 500 m le plus rapidement possible. Puisqu'ils sont de bons nageurs, tous les deux se déplacent à un rythme constant tout le long de la course. Après quatre minutes, Simon a parcouru 108,28 m et après 13 minutes, il en a parcouru 351,26. Trois minutes après son départ, il restait à René 425 m à parcourir et, après 11 minutes, il lui en restait 225.
Lequel des deux nageurs terminera la course le premier et par combien de temps ? Arrondissez les valeurs de $a$ et de $b$ à l'entier près.

**1** Règle de Simon

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{351{,}26 - 108{,}28}{13 - 4}$$

$$a = \frac{242{,}98}{9}$$

$$a \approx 27$$

$$f(x) = 27x + b$$

$$108{,}28 = 27(4) + b$$

$$108{,}28 = 108 + b$$

$$0{,}28 = b$$

$$0 \approx b$$

$$f(x) = 27x$$

**2** Distances parcourues par René

$500 - 425 = 75$ m après 3 min

$500 - 225 = 275$ m après 11 min

**3** Règle de René

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{275 - 75}{11 - 3}$$

$$a = \frac{200}{8}$$

$$a = 25$$

$$f(x) = 25x + b$$

$$75 = 25(3) + b$$

$$75 = 75 + b$$

$$0 = b$$

$$f(x) = 25x$$

**4** Temps de la course de Simon

$$f(x) = 27x$$

$$500 = 27x$$

$18{,}52 \text{ min} \approx x$

**5** Temps de la course de René

$$f(x) = 25x$$

$$500 = 25x$$

$20 \text{ min} = x$

**6** Différence entre les deux temps

$20 - 18{,}52 = 1{,}48$ min

**RÉPONSE** Simon terminera la course 1,48 minute plus rapidement que René.

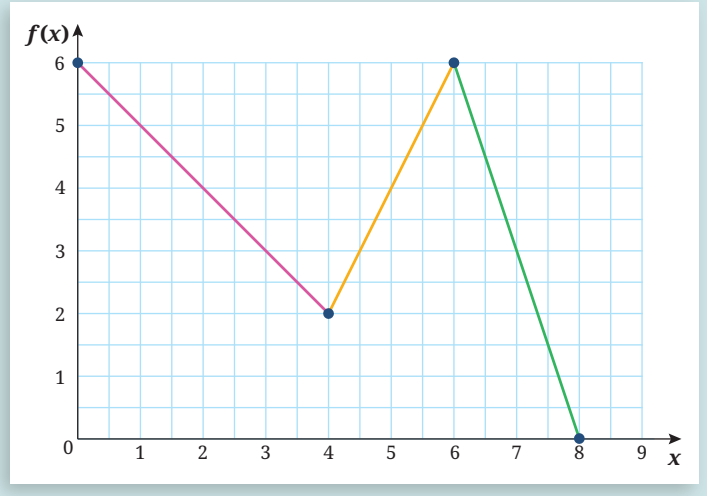
# 1.3 LES FONCTIONS DÉFINIES PAR PARTIES

## Représenter les fonctions définies par parties

Une fonction définie par parties n'est pas définie par la même règle sur tout son domaine. Ainsi, la règle de la fonction sera composée de plusieurs parties, chacune s'appliquant pour certaines valeurs de $x$. Il est donc possible de représenter une fonction dans un graphique et de trouver la règle de la fonction à partir du graphique.

**EXEMPLE 1**

**Trouver la règle de la fonction à partir du graphique.**




**1.** Déterminer le nombre de parties composant la fonction et trouver la règle de chaque partie.

Ici, la fonction est composée de trois parties.

| | | |
|---|---|---|
| $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ |
| $a = \frac{2 - 6}{4 - 0}$ | $a = \frac{6 - 2}{6 - 4}$ | $a = \frac{0 - 6}{8 - 6}$ |
| $a = \frac{-4}{4}$ | $a = \frac{4}{2}$ | $a = \frac{-6}{2}$ |
| $a = -1$ | $a = 2$ | $a = -3$ |
| $f(x) = -x + b$ | $f(x) = 2x + b$ | $f(x) = -3x + b$ |
| $6 = -(0) + b$ | $2 = 2(4) + b$ | $0 = -3(8) + b$ |
| $6 = b$ | $2 = 8 + b$ | $0 = -24 + b$ |
| $f(x) = -x + 6$ | $-6 = b$ | $24 = b$ |
| | $f(x) = 2x - 6$ | $f(x) = -3x + 24$ |

**2.** Puisqu'il s'agit de la même fonction, regrouper les règles à l'aide d'une accolade.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6 \\ 2x - 6 \\ -3x + 24 \end{cases}$$

**3.** Déterminer le domaine de chaque partie de la fonction et l'inscrire à côté de la règle à l'aide du langage mathématique.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6, \text{ pour } x \in [0, 4] \\ 2x - 6, \text{ pour } x \in [4, 6] \\ -3x + 24, \text{ pour } x \in [6, 8] \end{cases}$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**EXEMPLE 2**

**Représenter la fonction dans un plan cartésien.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, \text{ pour } x \in [-3, 1] \\ 5, \text{ pour } x \in [1, 2] \\ -4x + 13, \text{ pour } x \in [2, 5] \\ \frac{x}{2} - 4, \text{ pour } x \in ]5, \infty[ \end{cases}$$

**1.** Déterminer les coordonnées des points des extrémités de chacune des parties en remplaçant dans les règles les valeurs de $x$ des intervalles. Si un intervalle tend vers l'infini, remplacer le $x$ par n'importe quelle valeur de l'intervalle.

$f(x) = 2x + 3$

$f(-3) = 2(-3) + 3$
$f(-3) = -6 + 3$
$f(-3) = -3$
$(-3, -3)$

$f(1) = 2(1) + 3$
$f(1) = 2 + 3$
$f(1) = 5$
$(1, 5)$

$f(x) = 5$
$f(1) = 5$
$(1, 5)$

$f(2) = 5$
$(2, 5)$

$f(x) = -4x + 13$
$f(2) = -4(2) + 13$
$f(2) = -8 + 13$
$f(2) = 5$
$(2, 5)$

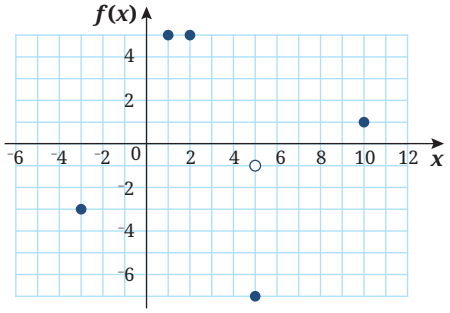
$f(5) = -4(5) + 13$
$f(5) = -20 + 13$
$f(5) = -7$
$(5, -7)$

$f(x) = \frac{x}{2} - 4$

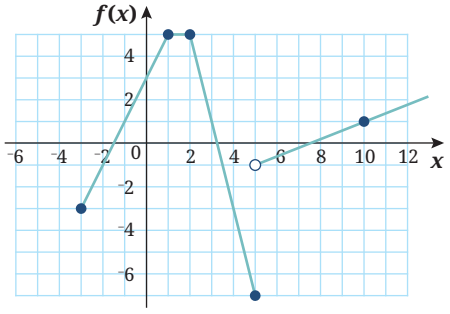
$f(5) = \frac{5}{2} - 4$
$f(5) = 2{,}5 - 4$
$f(5) = -1{,}5$
$(5\,;\, -1{,}5)$

$f(10) = \frac{10}{2} - 4$
$f(10) = 5 - 4$
$f(10) = 1$
$(10, 1)$

**2.** Placer chaque point dans le plan cartésien en considérant les points inclus et exclus.




**3.** Relier les points pour chacune des parties. Ne pas oublier de poursuivre les droites pour les intervalles tendant vers l'infini.

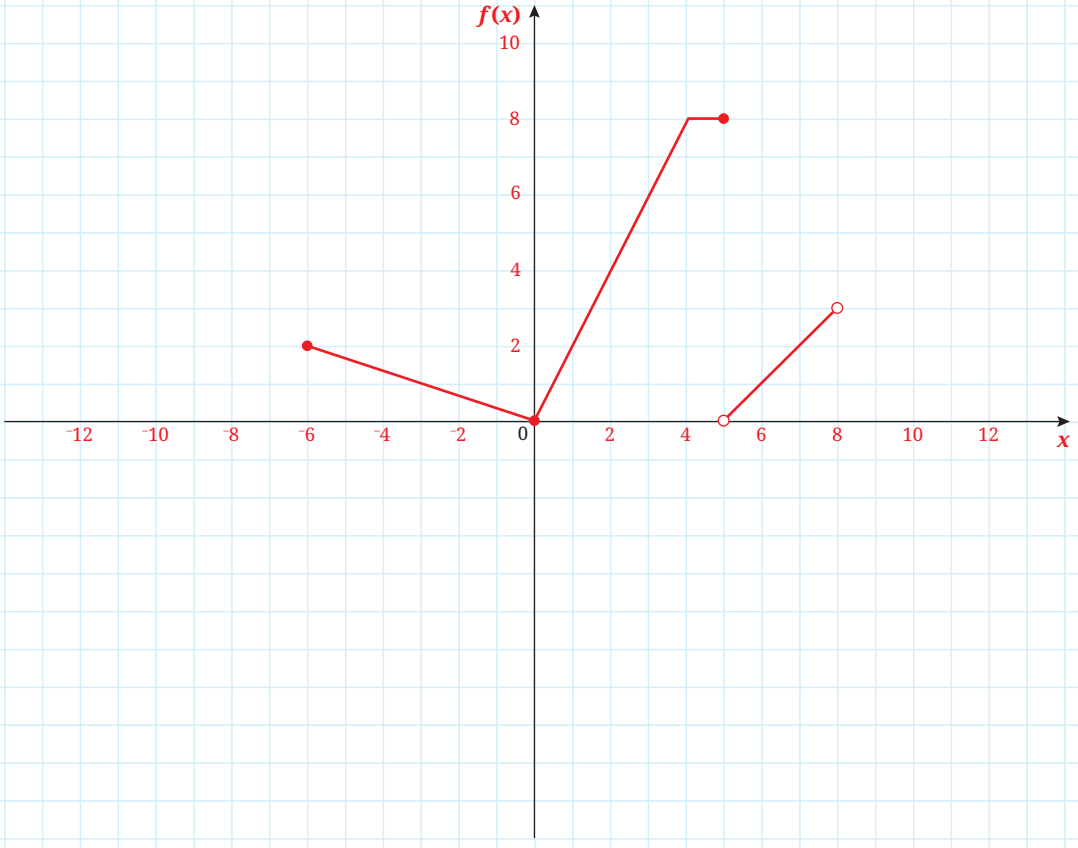


# EXERCICES

**1.** Représentez chacune des fonctions suivantes dans le plan cartésien.

**a**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{3}, \text{ pour } x \in [-6, 0] \\ 2x, \text{ pour } x \in [0, 4] \\ 8, \text{ pour } x \in [4, 5] \\ x - 5, \text{ pour } x \in ]5, 8[ \end{cases}$$




$f(x) = \frac{-x}{3}$

$f(-6) = \frac{-(-6)}{3}$

$f(-6) = 2$

$(-6, 2)$

$f(0) = \frac{-0}{3}$

$f(0) = 0$

$(0, 0)$

$f(x) = 2x$

$f(0) = 2(0)$

$f(0) = 0$

$(0, 0)$

$f(4) = 2(4)$

$f(4) = 8$

$(4, 8)$

$f(x) = 8$

$f(4) = 8$

$(4, 8)$

$f(5) = 8$

$(5, 8)$

$f(x) = x - 5$

$f(5) = 5 - 5$

$f(5) = 0$

$(5, 0)$

$f(8) = 8 - 5$

$f(8) = 3$

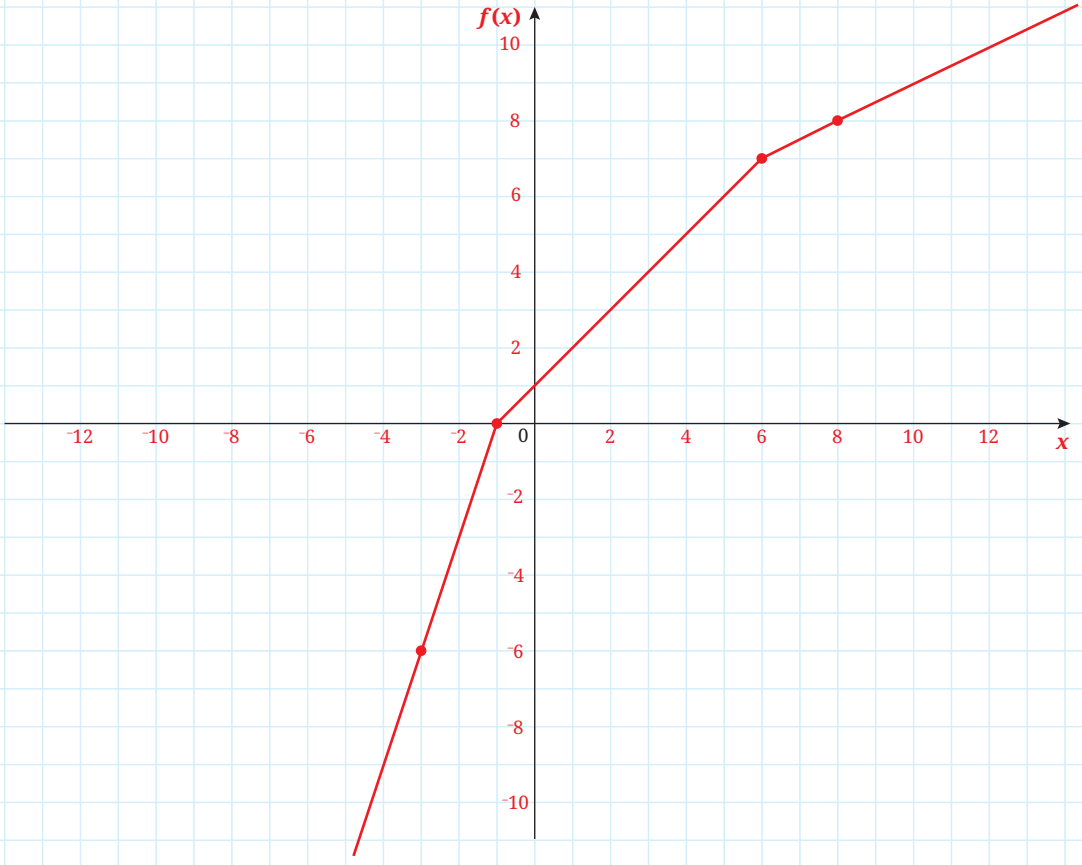
$(8, 3)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**b**

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 3, \text{ pour } x \in \ ]-\infty, -1] \\ x + 1, \text{ pour } x \in \ [-1, 6] \\ \frac{□}{2} + 4, \text{ pour } x \in \ [6, \infty[ \end{cases}$$




$g(x) = 3x + 3$

$g(-3) = 3(-3) + 3$
$g(-3) = -9 + 3$
$g(-3) = -6$
$(-3, -6)$

$g(-1) = 3(-1) + 3$
$g(-1) = -3 + 3$
$g(-1) = 0$
$(-1, 0)$

$g(x) = x + 1$

$g(-1) = (-1) + 1$
$g(-1) = 0$
$(-1, 0)$

$g(6) = (6) + 1$
$g(6) = 7$
$(6, 7)$

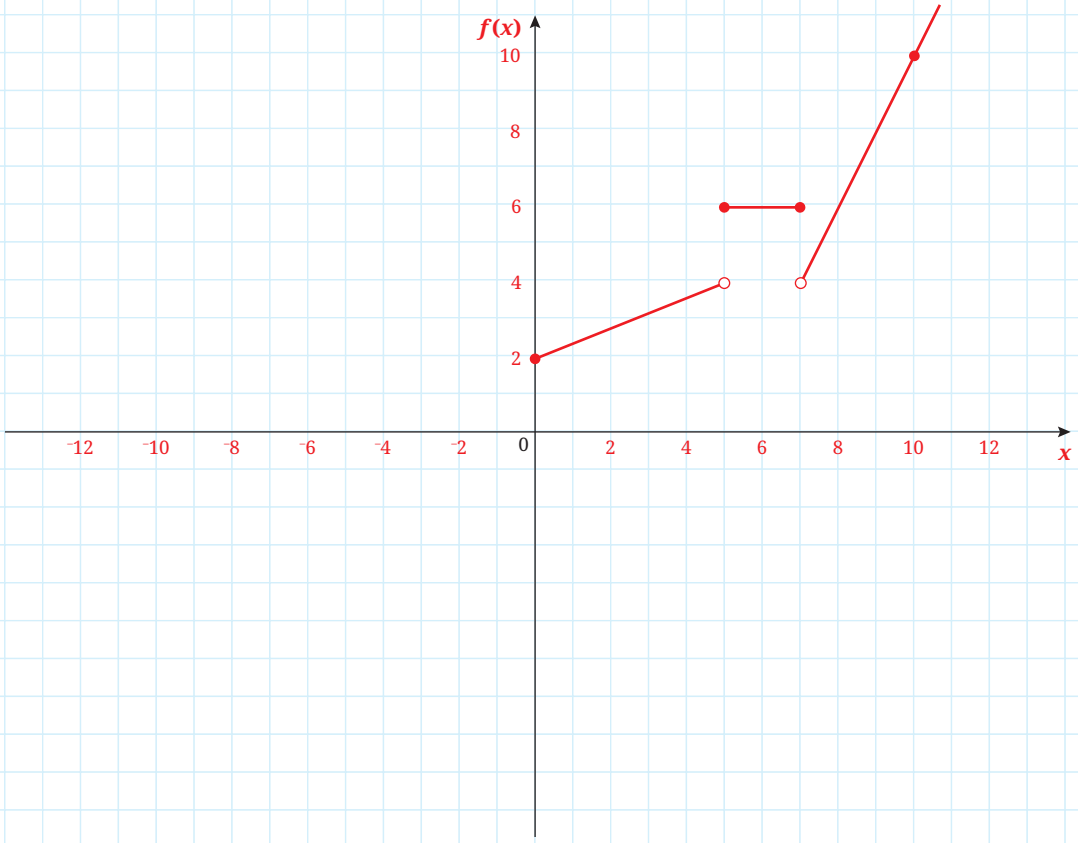
$g(x) = \frac{□}{2} + 4$

$g(6) = \frac{6}{2} + 4$
$g(6) = 3 + 4$
$g(6) = 7$
$(6, 7)$

$g(8) = \frac{8}{2} + 4$
$g(8) = 4 + 4$
$g(8) = 8$
$(8, 8)$

**c**

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x}{5} + 2, \text{ pour } x \in [0, 5[ \\ 6, \text{ pour } x \in [5, 7] \\ 2x - 10, \text{ pour } x \in ]7, \infty[ \end{cases}$$




$h(x) = \frac{2x}{5} + 2$

$h(0) = \frac{0}{5} + 2$
$h(0) = 0 + 2$
$h(0) = 2$
$(0, 2)$

$h(5) = \frac{2(5)}{5} + 2$
$h(5) = 2 + 2$
$h(5) = 4$
$(5, 4)$

$h(x) = 6$

$h(5) = 6$
$(5, 6)$

$h(7) = 6$
$(7, 6)$

$h(x) = 2x - 10$

$h(7) = 2(7) - 10$
$h(7) = 14 - 10$
$(7, 4)$

$h(10) = 2(10) - 10$
$h(10) = 20 - 10$
$(10, 10)$

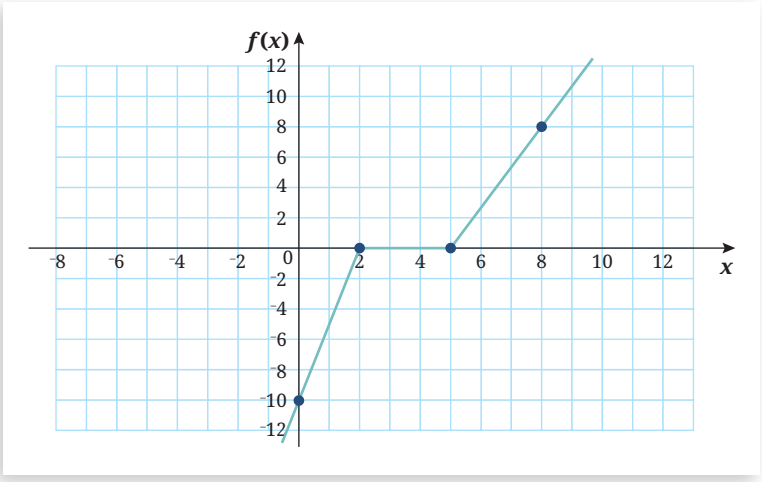
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**2.** Déterminez la règle de chacune des fonctions représentées ci-dessous.

**a**




**1**

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{0 - {}^{-}10}{2 - 0}$

$a = \dfrac{10}{2}$

$a = 5$

$f(x) = 5x + b$

${}^{-}10 = 5(0) + b$

${}^{-}10 = b$

$f(x) = 5x - 10$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{0 - 0}{5 - 2}$

$a = \dfrac{0}{3}$

$a = 0$

$f(x) = b$

$0 = b$

$f(x) = 0$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{8 - 0}{8 - 5}$

$a = \dfrac{8}{3}$

$f(x) = \dfrac{8}{3}x + b$

$0 = \dfrac{8(5)}{3} + b$

$0 = \dfrac{40}{3} + b$

$\dfrac{{}^{-}40}{3} = b$

$f(x) = \dfrac{8}{3}x - \dfrac{40}{3}$

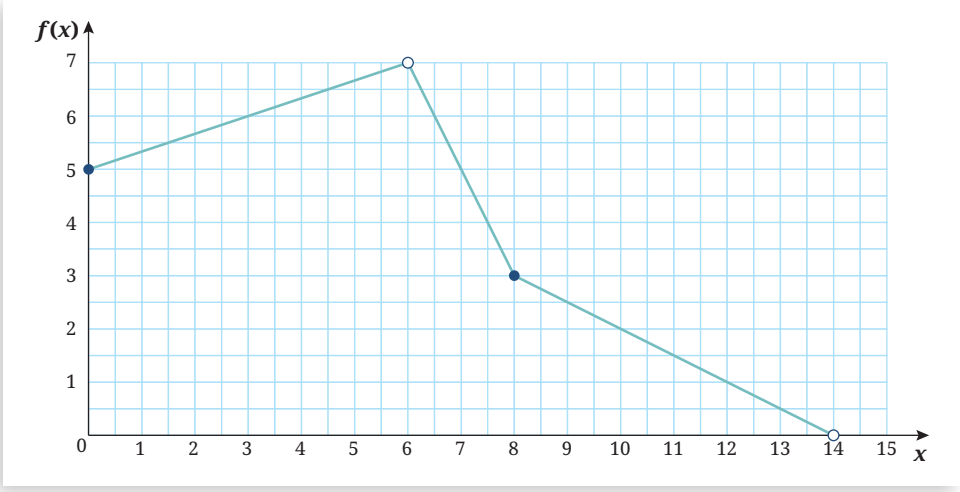
**2** et **3**

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 10, \text{ pour } x \in \,]{}^{-}\infty, 2] \\ 0, \text{ pour } x \in [2, 5] \\ \dfrac{8}{3}x - \dfrac{40}{3}, \text{ pour } x \in [5, \infty[ \end{cases}$$

**RÉPONSE**

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 10, \text{ pour } x \in \,]{}^{-}\infty, 2] \\ 0, \text{ pour } x \in [2, 5] \\ \dfrac{8}{3}x - \dfrac{40}{3}, \text{ pour } x \in [5, \infty[ \end{cases}$$

**b**




**1** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{7 - 5}{6 - 0}$

$a = \dfrac{2}{6}$

$a = \dfrac{1}{3}$

$f(x) = \dfrac{\square}{3} + b$

$5 = \dfrac{0}{3} + b$

$5 = 0 + b$

$5 = b$

$f(x) = \dfrac{\square}{3} + 5$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{3 - 7}{8 - 6}$

$a = \dfrac{-4}{2}$

$a = -2$

$f(x) = -2x + b$

$7 = -2(6) + b$

$7 = -12 + b$

$19 = b$

$f(x) = -2x + 19$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{0 - 3}{14 - 8}$

$a = \dfrac{-3}{6}$

$a = \dfrac{-1}{2}$

$f(x) = \dfrac{-\square}{2} + b$

$0 = \dfrac{-14}{2} + b$

$0 = -7 + b$

$7 = b$

$f(x) = \dfrac{-\square}{2} + 7$

**2** et **3**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\square}{3} + 5, \text{ pour } x \in [0, 6[ \\ -2x + 19, \text{ pour } x \in ]6, 8] \\ \dfrac{-\square}{2} + 7, \text{ pour } x \in [8, 14[ \end{cases}$$

**RÉPONSE**

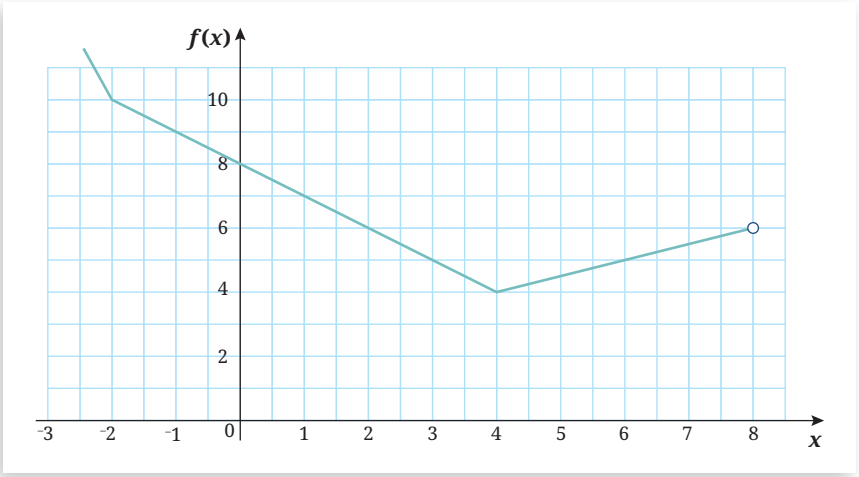
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\square}{3} + 5, \text{ pour } x \in [0, 6[ \\ -2x + 19, \text{ pour } x \in ]6, 8] \\ \dfrac{-\square}{2} + 7, \text{ pour } x \in [8, 14[ \end{cases}$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★3. Effectuez l'analyse complète des fonctions représentées ci-dessous.

**a**




**Domaine** ]⁻∞, 8[ **Image** [4, ∞[

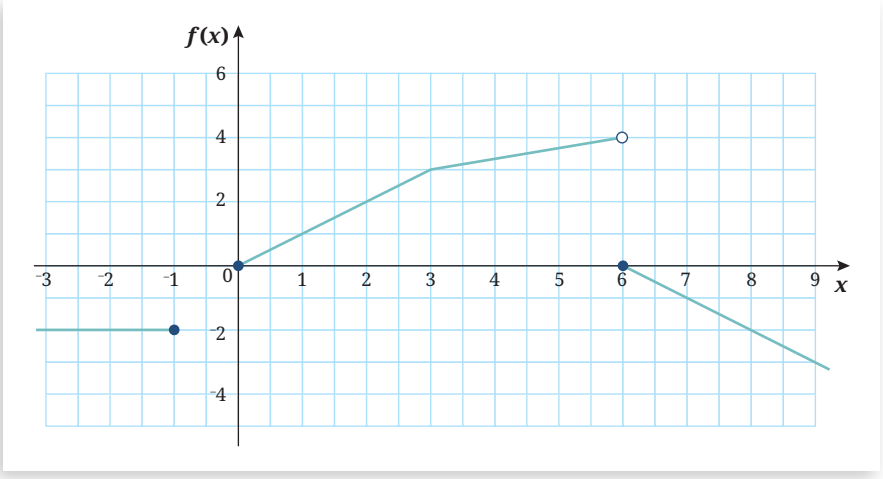
**Variation** Croissante pour $x \in [4, 8[$ et décroissante pour $x \in ]^{-}\infty, 4]$

**Signe** Positive sur le domaine

**Extremums** Pas de maximum et minimum {4}

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune **Ordonnée(s) à l'origine** {8}

**b**




**Domaine** ]⁻∞, ⁻1] ∪ [0, ∞[ **Image** [4, ∞[

**Variation** Constante pour $x \in ]^{-}\infty, {}^{-}1]$, croissante pour $x \in [0, 6[$ et décroissante pour $x \in ]6, \infty[$

**Signe** Positive pour $x \in [0, 6[$ et négative pour $x \in ]^{-}\infty, {}^{-}1] \cup [6, \infty[$

**Extremums** Pas de minimum et ni de maximum

**Abscisse(s) à l'origine** {0, 6} **Ordonnée(s) à l'origine** {0}

★★ **4.** Andréa adore faire du vélo et elle a une application qui lui permet de compiler différentes données sur les trajets qu'elle emprunte. Voici celles que son application a compilées sur sa dernière balade.

**Distance totale parcourue : 12,5 km**

**Durée de la balade : 61 minutes**

Finalement, Andréa sait qu'après avoir parcouru 6 km, elle s'est arrêtée pendant 3 minutes pour effectuer des redressements assis dans un parc. Lorsqu'Andréa a repris sa balade, son application lui indiquait qu'elle était partie de chez elle depuis 32 minutes.

**a** Déterminez la règle de la fonction par parties représentant la balade d'Andréa.

**1** Coordonnées des points où les différentes parties débutent et se terminent

(0, 0)

$32 - 3 = 29$

(29, 6)

(32, 6)

(61 ; 12,5)

Il y a donc trois parties à la fonction.

**2** Règle de la première partie

(0, 0) et (29, 6)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{6 - 0}{29 - 0}$$

$$a = \frac{6}{29}$$

$$f(x) = \frac{6x}{29} \text{ ou } f(x) \approx 0{,}21x$$

**3** Règle de la deuxième partie

(29, 6) et (32, 6)

$f(x) = 6$

**4** Règle de la troisième partie

(32, 6) et (61 ; 12,5)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{12{,}5 - 6}{61 - 32}$$

$$a = \frac{6{,}5}{29}$$

$$a = \frac{13}{58}$$

$$f(x) = \frac{13x}{58} + b$$

$$6 = \frac{13(32)}{58} + b$$

$$6 = \frac{208}{29} + b$$

$$\frac{-34}{29} = b \text{ ou } -1{,}17 = b$$

$$f(x) = \frac{13x}{58} - \frac{34}{29} \text{ ou } f(x) \approx 0{,}22x - 1{,}17$$

**5** Règle finale

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{29} \text{ ou } 0{,}21x, \text{ pour } x \in [0, 29] \\ 6, \text{ pour } x \in [29, 32] \\ \frac{13x}{58} - \frac{34}{29} \text{ ou } 0{,}22x - 1{,}17, \text{ pour } x \in [32, 61] \end{cases}$$

**RÉPONSE** La règle de la balade d'Andréa est $f(x) = \begin{cases} \frac{6x}{29} \text{ ou } 0{,}21x, \text{ pour } x \in [0, 29] \\ 6, \text{ pour } x \in [29, 32] \\ \frac{13x}{58} - \frac{34}{29} \text{ ou } 0{,}22x - 1{,}17, \text{ pour } x \in [32, 61] \end{cases}$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**b** Huit minutes après avoir quitté le parc, quelle distance a parcourue Andréa depuis son départ de chez elle ?

**1** Valeur de $x$

$8 + 32 = 40$

**2** Distance parcourue par Andréa

$$f(x) = \frac{13\square}{58} - \frac{34}{29}$$

$$f(x) = \frac{13(40)}{58} - \frac{34}{29}$$

$$f(x) = \frac{260}{29} - \frac{34}{29}$$

$$f(x) = \frac{226}{29} \text{ ou } f(x) \approx 7{,}79$$

**RÉPONSE** Andréa a parcouru $\frac{226}{29}$ km ou 7,79 km 8 minutes après avoir quitté le parc.

**c** Après combien de temps Andréa a-t-elle parcouru 5 km ?

$$f(x) = \frac{6\square}{29}$$

$$5 = \frac{6\square}{29}$$

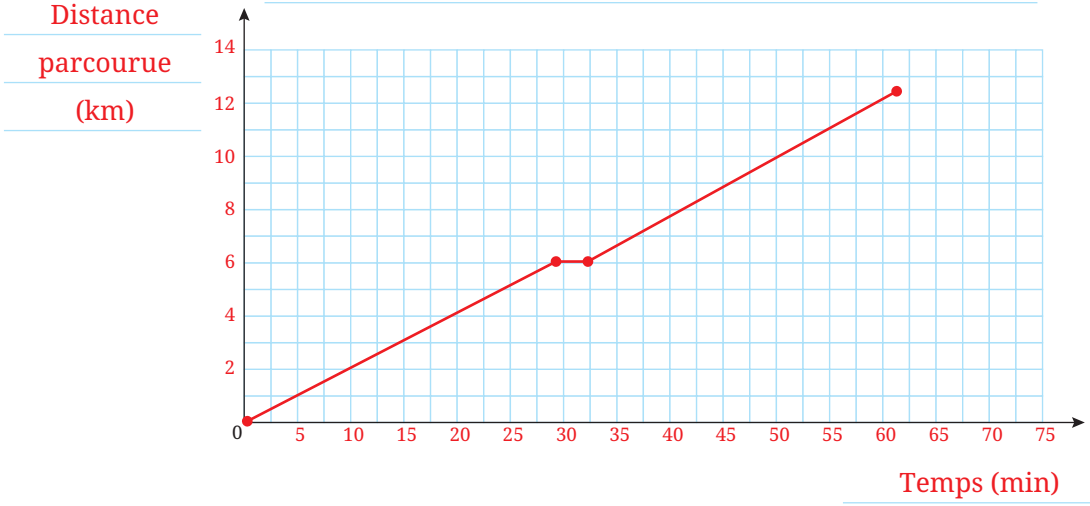
$$145 = 6x$$

$$\frac{145}{6} = x \text{ ou } 24{,}1\overline{6} = x$$

**RÉPONSE** Andréa a parcouru 5 km après $\frac{145}{6}$ ou $24{,}1\overline{6}$ minutes.

**d** Représentez graphiquement cette situation.

Distance parcourue par Andréa selon le temps écoulé



**★★5.** La règle suivante représente, en mètres, la hauteur d'un remonte-pente de ski selon le temps écoulé, en minutes, depuis le moment où des skieurs sont montés à bord de la nacelle.

$$f(x) = \begin{cases} 100x, \text{ pour } x \in [0, 3] \\ 60x + 120, \text{ pour } x \in [3, 5] \\ 150x - 330, \text{ pour } x \in [5, 8] \\ 40x + 550, \text{ pour } x \in [8, 9] \end{cases}$$

**a** Quelle est la hauteur de cette montagne ?

$f(x) = 40x + 550$
$f(9) = 40(9) + 550$
$f(9) = 360 + 550$
$f(9) = 910$

**RÉPONSE** La hauteur de cette montagne est de 910 m.

**b** Après combien de temps la nacelle du remonte-pente a-t-elle atteint 650 m d'altitude ?

**1** Hauteur maximale atteinte par la première partie de la fonction
$f(3) = 100(3)$
$f(3) = 300$
La nacelle n'a pas atteint 650 m sur la première partie de la fonction.

**2** Hauteur maximale atteinte par la deuxième partie de la fonction
$f(5) = 60(5) + 120$
$f(5) = 300 + 120$
$f(5) = 420$
La nacelle n'a pas atteint 650 m sur la deuxième partie de la fonction.

**3** Hauteur maximale atteinte par la troisième partie de la fonction
$f(8) = 150(8) - 330$
$f(8) = 1200 - 330$
$f(8) = 870$
La nacelle a atteint 650 m durant la troisième partie de la fonction.

**4** Temps pour atteindre 650 m
$f(x) = 150x - 330$
$650 = 150x - 330$
$980 = 150x$
$6,5\overline{3} = x$

**RÉPONSE** La nacelle du remonte-pente a atteint 650 m après $6,5\overline{3}$ minutes.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**c** Si un skieur se trouve dans le remonte-pente depuis 7 minutes, de combien de mètres sa nacelle doit-elle encore s'élever afin d'atteindre le sommet ?

**1** Altitude de la nacelle après 7 minutes

$f(7) = 150(7) - 330$

$f(7) = 1050 - 330$

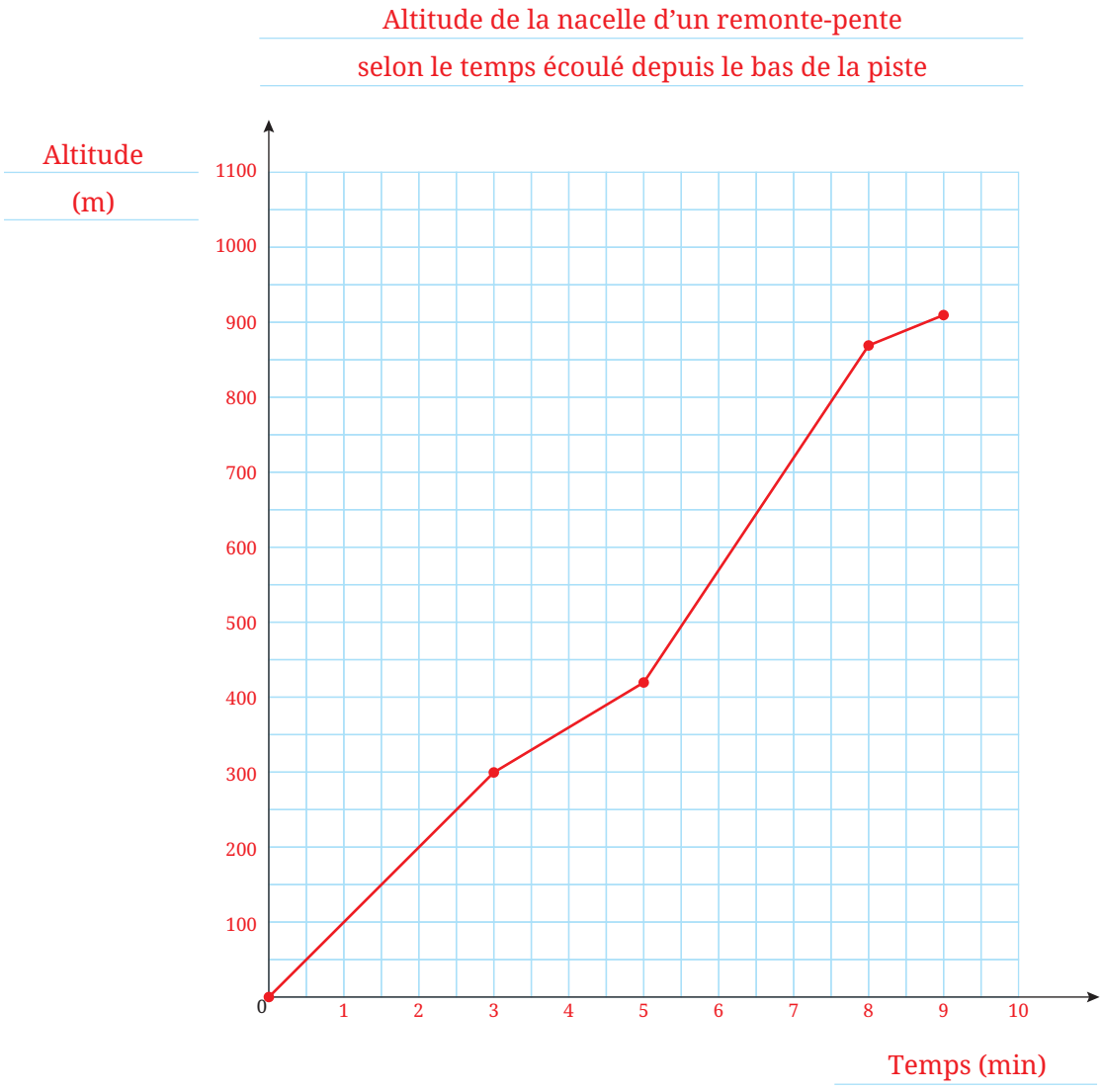
$f(7) = 720$

**2** Nombre de mètres la séparant du sommet

$910 - 720 = 190$

**RÉPONSE** La nacelle doit encore s'élever de 190 m.

**d** Représentez graphiquement cette situation.



# 1.4 LES FONCTIONS EN ESCALIER

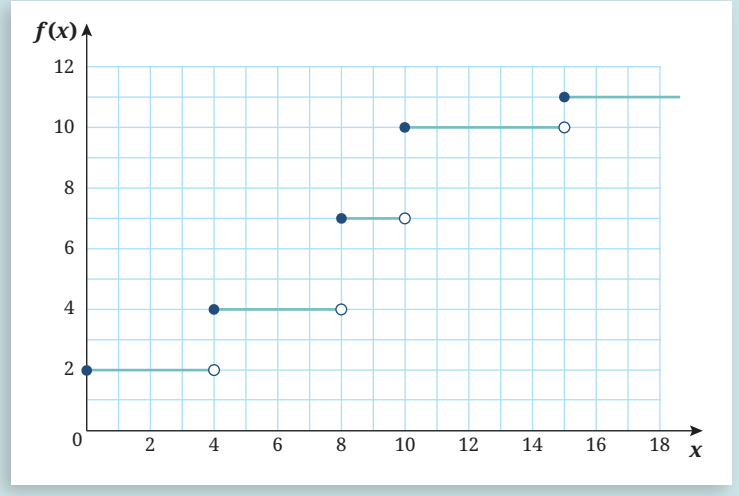
## Représenter les fonctions en escalier

Une fonction en escalier est, en fait, une fonction par parties dont chacune des parties est constante. Elle tire son nom de l'allure de son graphique, qui ressemble à un escalier en raison de ses segments horizontaux.

Les extrémités des segments sont toujours représentées par des points fermés ou ouverts dans le graphique et par des crochets ouvrants ou fermants dans la table de valeurs.

**EXEMPLE**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| [0, 4[ | 2 |
| [4, 8[ | 4 |
| [8, 10[ | 7 |
| [10, 15[ | 10 |
| [15, ∞[ | 11 |

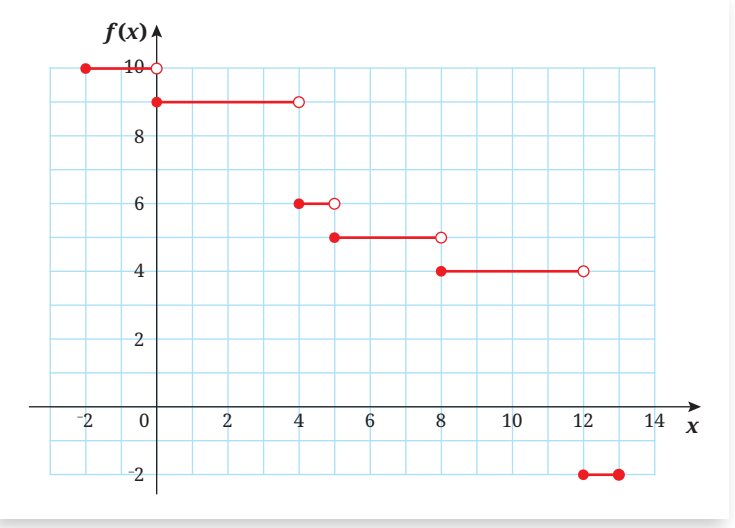



## EXERCICES

★**1.** À l'aide de la table de valeurs, représentez graphiquement chaque fonction.

**a**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| [⁻2, 0[ | 10 |
| [0, 4[ | 9 |
| [4, 5[ | 6 |
| [5, 8[ | 5 |
| [8, 12[ | 4 |
| [12, 13] | ⁻2 |



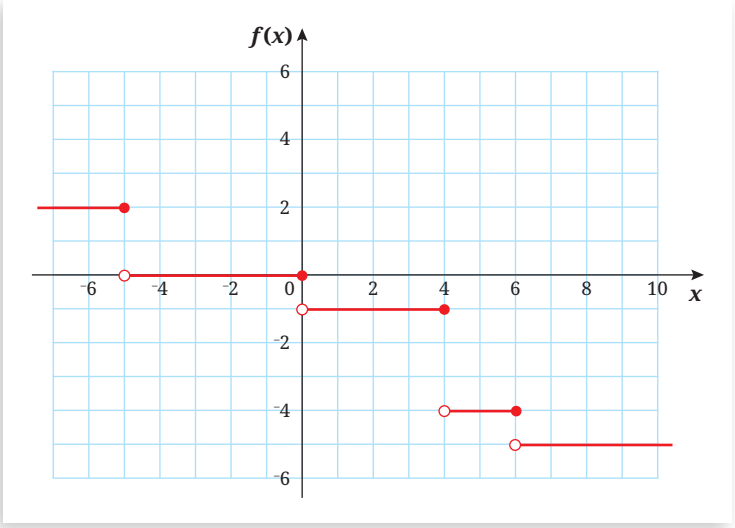

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



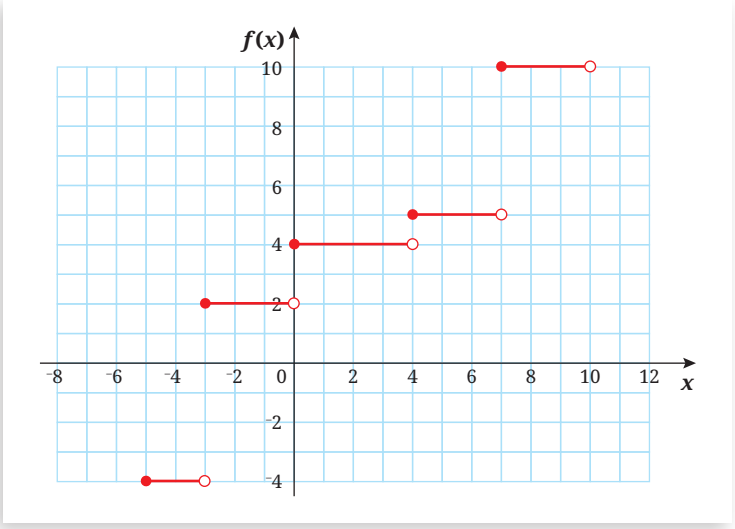
**b**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $]-\infty, -5]$ | 2 |
| $]-5, 0]$ | 0 |
| $]0, 4]$ | $-1$ |
| $]4, 6]$ | $-4$ |
| $]6, \infty[$ | $-5$ |



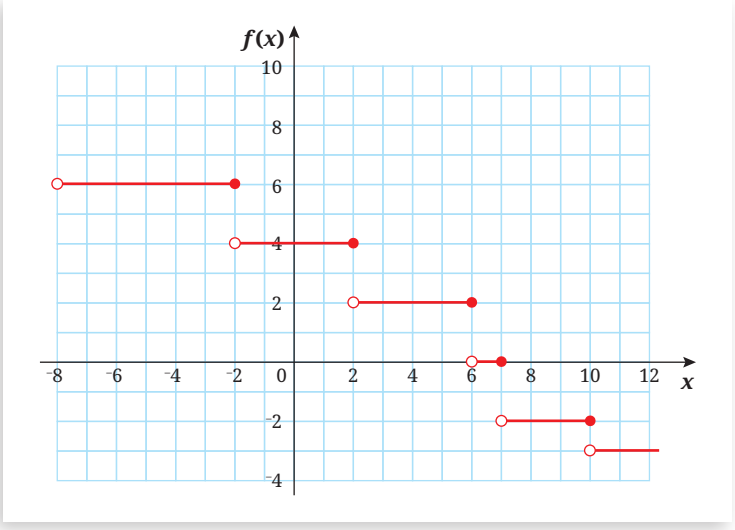

**c**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $[-5, -3[$ | $-4$ |
| $[-3, 0[$ | 2 |
| $[0, 4[$ | 4 |
| $[4, 7[$ | 5 |
| $[7, 10[$ | 10 |



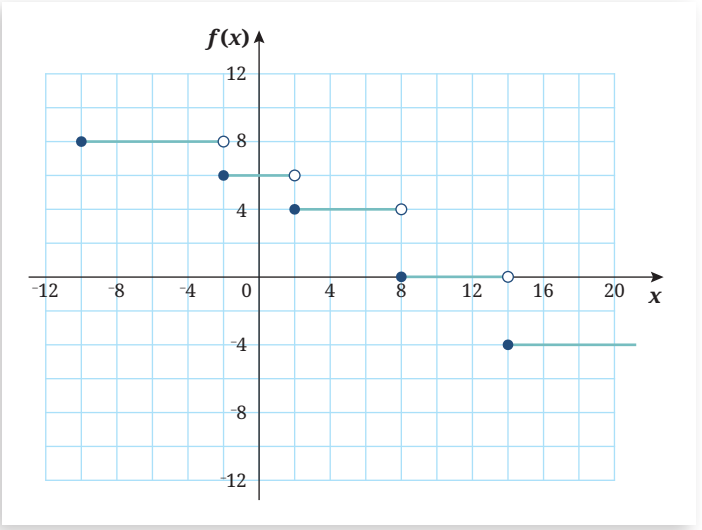

**d**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $]-8, -2]$ | 6 |
| $]-2, 2]$ | 4 |
| $]2, 6]$ | 2 |
| $]6, 7]$ | 0 |
| $]7, 10]$ | $-2$ |
| $]10, \infty[$ | $-4$ |



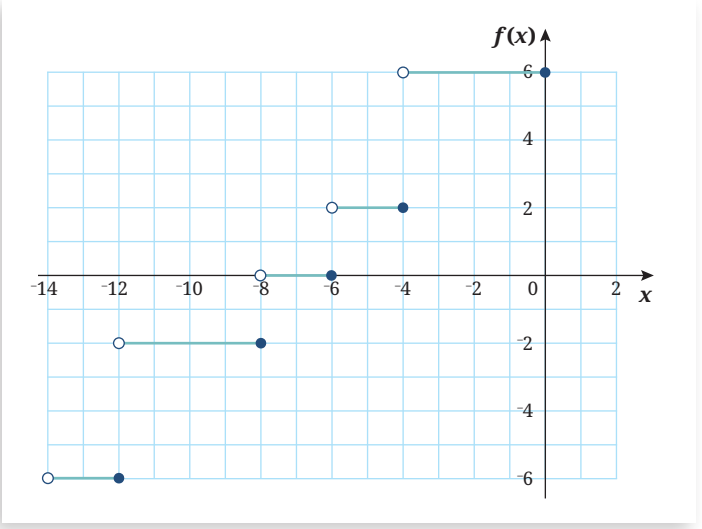
★**2.** À l'aide du graphique, remplissez la table de valeurs associée à chaque fonction.

**a**



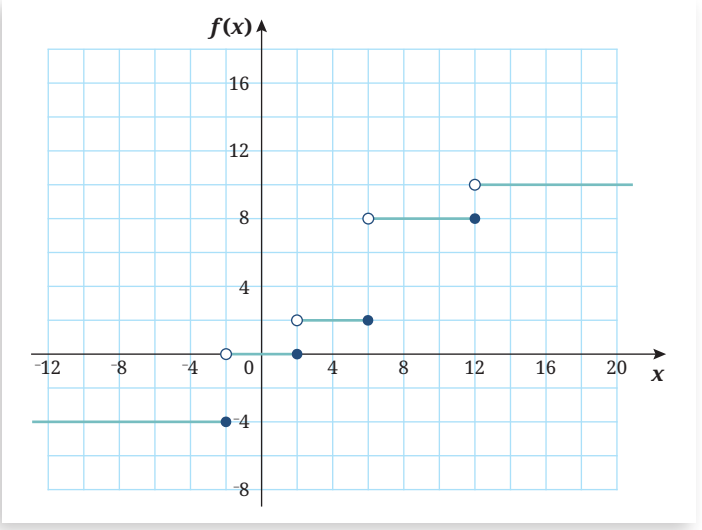

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $[-10, -2[$ | 8 |
| $[-2, 2[$ | 6 |
| $[2, 8[$ | 4 |
| $[8, 14[$ | 0 |
| $[14, \infty[$ | $-4$ |

**b**




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $]-14, -12]$ | $-6$ |
| $]-12, -8]$ | $-2$ |
| $]-8, -6]$ | 0 |
| $]-6, -4]$ | 2 |
| $]-4, 0]$ | 6 |

**c**



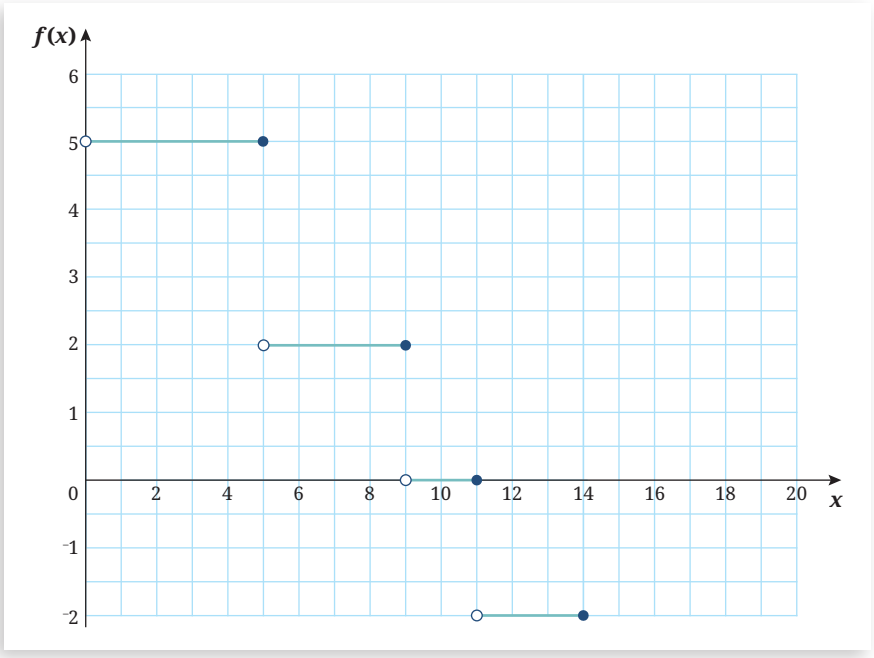

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $]-\infty, -2]$ | $-4$ |
| $]-2, 2]$ | 0 |
| $]2, 6]$ | 2 |
| $]6, 12]$ | 8 |
| $]12, \infty[$ | 10 |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**3.** Déterminez les valeurs demandées pour chacune des fonctions représentées ci-dessous.

**a**




**1)** $f(5) =$ 5

**2)** Si $f(x) = 5$, $x =$ ]0, 5]

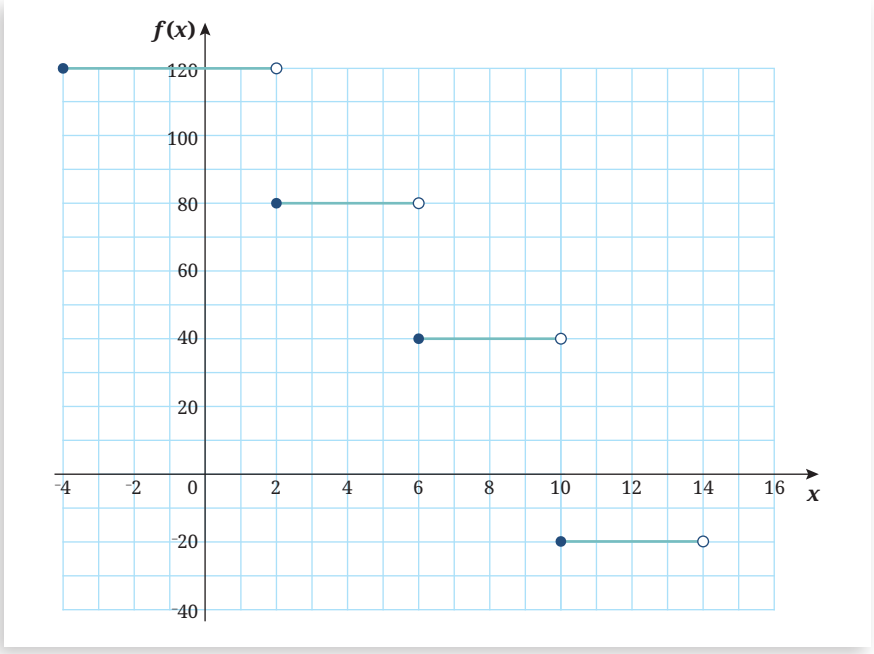
**3)** Si $f(x) = -2$, $x =$ ]11, 14]

**4)** $f(11) =$ 0

**5)** $f(4{,}5) =$ 5

**6)** Si $f(x) = 0$, $x =$ ]9, 11]

**b**




**1)** $f(10) =$ -20

**2)** Si $f(x) = 120$, $x =$ [-4, 2[

**3)** Si $f(x) = -20$, $x =$ [10, 14[

**4)** $f(14) =$ Indéfini

**5)** $f(2) =$ 80

**6)** Si $f(x) = 100$, $x =$ Indéfini

## Faire l'analyse des fonctions en escalier

Puisqu'elles sont composées d'une série de fonctions constantes, les fonctions en escalier s'analysent différemment des autres types de fonctions pour certaines propriétés.

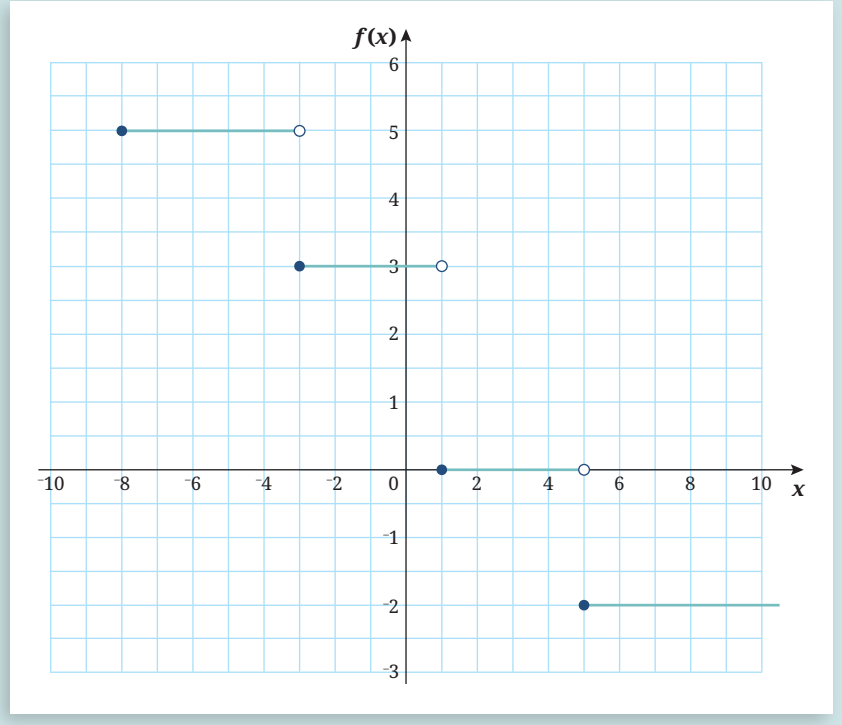
Voici les propriétés qui ont des particularités.

**Image**
L'image est composée de toutes les valeurs de $y$ de la fonction. On l'écrit à l'aide d'accolades, par exemple $\{-1, 1, 2, 6, 8\}$.

**Variation**
Il faut se fier à l'allure du graphique. Si l'escalier « monte », on dit que la fonction est croissante sur le domaine et si l'escalier « descend », on dit que la fonction est décroissante sur le domaine.

**Abscisses à l'origine**
Comme pour les autres fonctions, il se peut qu'il n'y ait pas d'abscisse à l'origine. Toutefois, s'il y en a, c'est un palier complet qui est sur l'axe des $x$. Il faut donc représenter les abscisses à l'origine à l'aide d'un intervalle, par exemple $[-4, 0[$.

**EXEMPLE**




**Domaine :** $[-8, \infty[$
**Image :** $\{-2, 0, 3, 5\}$
**Variation :** décroissante sur le domaine
**Signe :** positive pour $x \in [-8, 5[$ et négative pour $x \in [5, \infty[$
**Ordonnée à l'origine :** $\{3\}$
**Abscisses à l'origine :** $[1, 5[$
**Maximum :** $\{5\}$
**Minimum :** $\{-2\}$

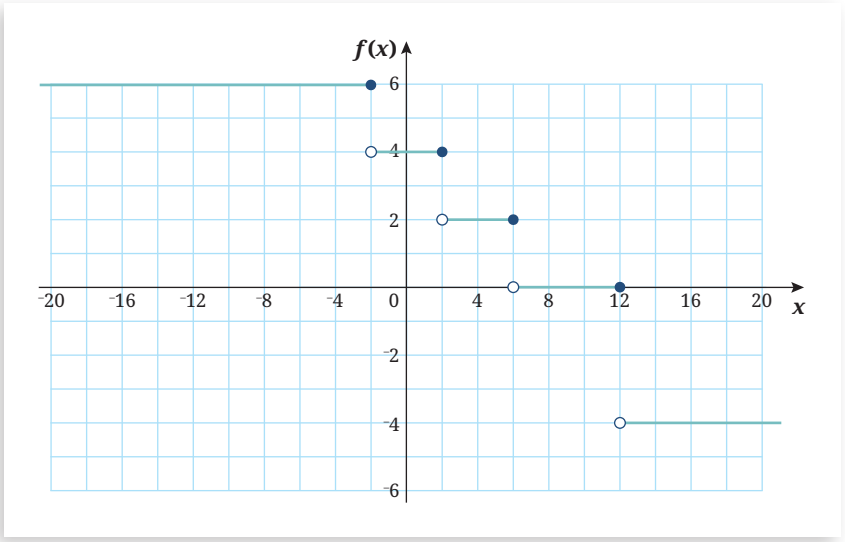
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** Faites l'analyse complète des fonctions représentées ci-dessous.

**a**




**Domaine** $\mathbb{R}$ **Image** $\{-4, 0, 2, 4, 6\}$

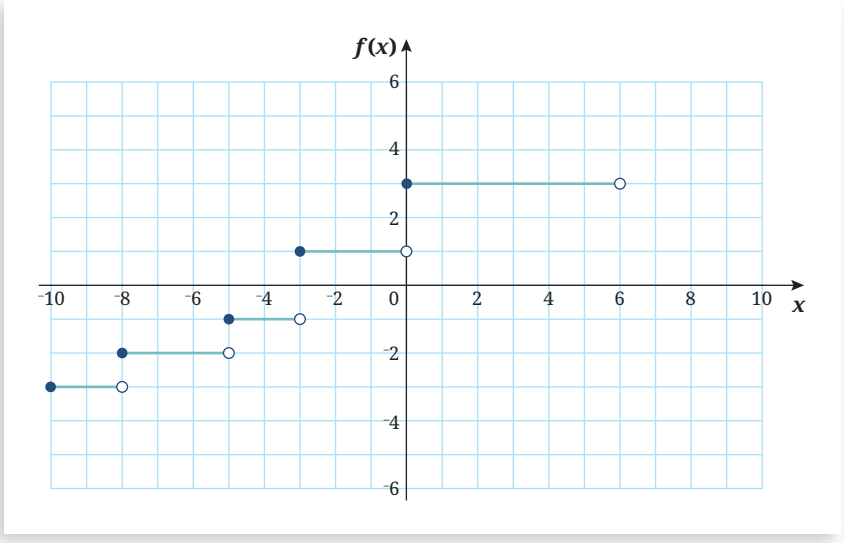
**Variation** Décroissante sur le domaine

**Signe** Positive pour $x \in ]-\infty, 12]$ et négative pour $x \in ]12, \infty[$

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{4\}$ **Abscisse(s) à l'origine** $]6, 12]$

**Maximum** $\{6\}$ **Minimum** $\{-4\}$

**b**




**Domaine** $[-10, 6[$ **Image** $\{-3, -2, -1, 1, 3\}$

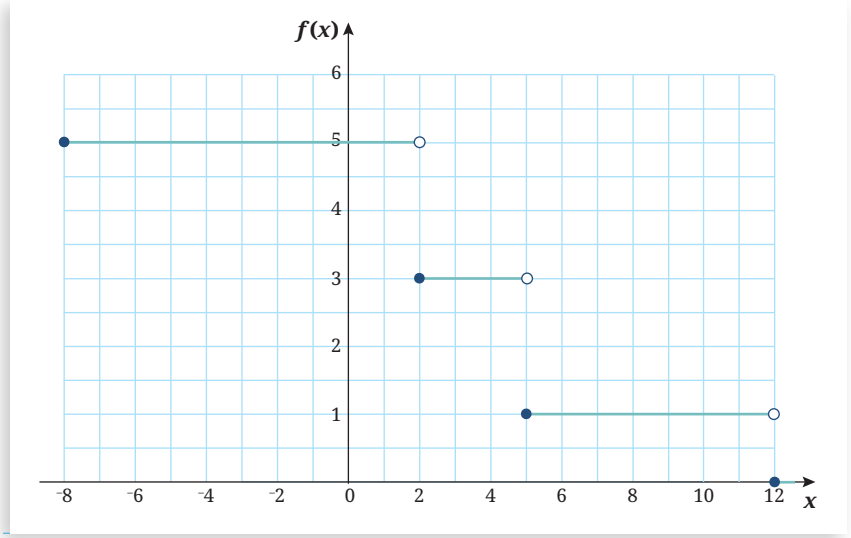
**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive pour $x \in [-3, 6[$ et négative pour $x \in [-10, -3[$

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{3\}$ **Abscisse(s) à l'origine** Aucune

**Maximum** $\{3\}$ **Minimum** $\{-3\}$

**c**




**Domaine** $[-8, \infty[$ **Image** $\{0, 1, 3, 5\}$

**Variation** Décroissante sur le domaine

**Signe** Positive sur le domaine

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{5\}$ **Abscisse(s) à l'origine** $[12, \infty[$

**Maximum** $\{5\}$ **Minimum** $\{0\}$

**d**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $]-\infty, 4]$ | 0 |
| $]4, 10]$ | 4 |
| $]10, 18]$ | 8 |
| $]18, \infty[$ | 12 |

**Domaine** $\mathbb{R}$

**Image** $\{0, 4, 8, 12\}$

**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive sur le domaine

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{0\}$

**Abscisse(s) à l'origine** $]-\infty, 4]$

**Maximum** $\{12\}$ **Minimum** $\{0\}$

**e**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $[-8, -6[$ | $-5$ |
| $[-6, -1[$ | $-1$ |
| $[-1, 5[$ | 2 |
| $[7, 12[$ | 5 |
| $[12, \infty[$ | 10 |

**Domaine** $[-8, 5[ \cup [7, \infty[$

**Image** $\{-5, -1, 2, 5, 10\}$

**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive pour $x \in [-1, 5[ \cup [7, \infty[$ et négative pour $x \in [-8, -1[$

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{2\}$

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune

**Maximum** $-5$ **Minimum** 10

© Grand Duc en ligne

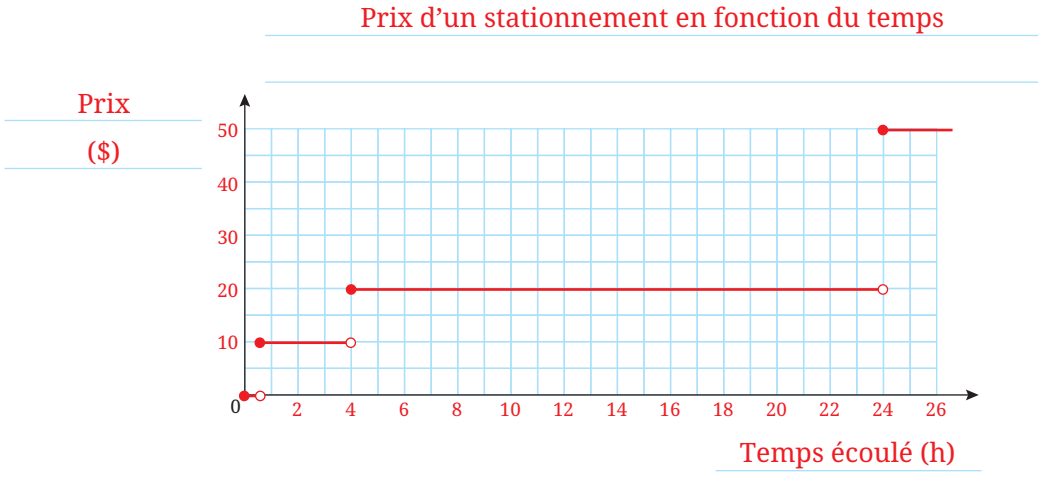
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Voici le panneau indiquant les prix d'une aire de stationnement.

| DURÉE | PRIX ($) |
|---|---|
| Moins de 30 minutes | Gratuit |
| De 30 minutes jusqu'à 4 heures | 10 |
| De 4 heures jusqu'à 24 heures | 20 |
| 24 heures ou plus | 50 |

**a** Représentez graphiquement cette situation.




**b** Olivier stationne souvent son auto à cet endroit. Dans les derniers jours, il l'a stationnée durant 45 minutes, 4 heures, 6 heures et 2 heures. Quelle est la somme totale qu'il a déboursée pour son stationnement lors des derniers jours ?

Prix pour 45 minutes : 10
Prix pour 4 heures : 20
Prix pour 6 heures : 20
Prix pour 2 heures : 10
Prix total : 10 + 20 + 20 + 10 = 60

**RÉPONSE** Olivier a déboursé 60 $ au total pour son stationnement.

**c** Serait-il préférable pour Olivier d'essayer de regrouper ses heures de travail dans la même journée ? Justifiez votre réponse.

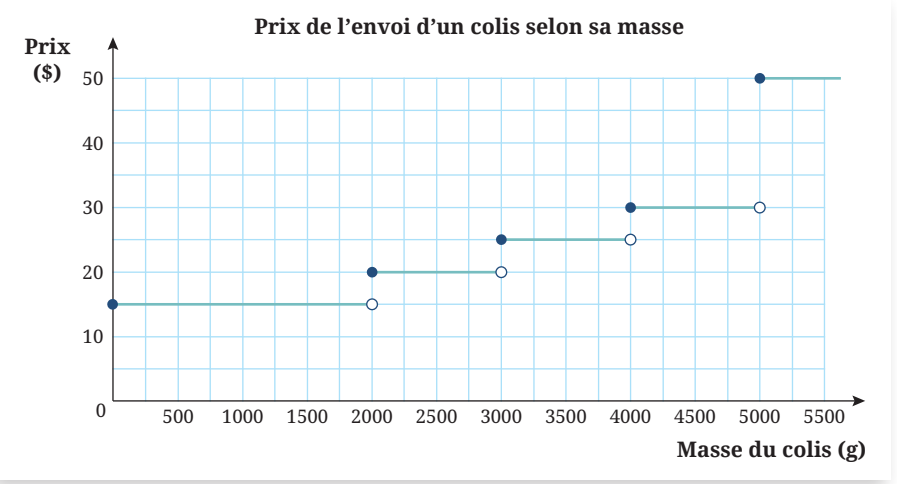
1 Temps total
45 min + 4 h + 6 h + 2 h = 12 h 45

2 Prix pour 12 h 45
20

3 Comparaison des prix
20 < 60

**RÉPONSE** S'il regroupait ses heures de travail dans la même journée, Olivier paierait son stationnement moins cher.

★★**3.** Une compagnie offre à sa clientèle de livrer les colis où elle le désire à travers le Québec. Voici le graphique indiquant le prix de livraison des colis.




**a** Un client désire envoyer un colis de 3000 g et un autre de 6000 g. Quel sera le prix de la livraison ?

**1** Prix pour chaque colis
Prix pour 3000 g : 25
Prix pour 6000 g : 50

**2** Prix total
25 + 50 = 75

**RÉPONSE** Le prix de la livraison sera de 75 $.

**b** Une cliente veut envoyer un objet de 3500 g et un autre de 2200 g au même endroit. Sera-t-il préférable pour elle de les mettre dans un même colis ou de les mettre dans deux colis séparés ?

**1** Prix pour des colis séparés
Prix pour 3500 g : 25
Prix pour 2200 g : 20
Prix total : 45

**2** Prix pour un seul colis
3500 + 2200 = 5700 g
Prix pour 5700 g = 50

**3** Comparaison des prix
45 < 50

**RÉPONSE** Il serait plus avantageux pour la cliente de les mettre dans deux colis séparés.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **4.** Un programme informatique est conçu pour effectuer pendant la nuit la sauvegarde de tous les fichiers d'un disque dur sur une plateforme externe. Le programme stocke 100 Go de données par heure. Cependant, chaque heure doit être complétée afin que les fichiers soient tous sauvegardés. Si on interrompt le programme avant la fin d'une heure, rien ne sera sauvegardé.

**a** S'il doit sauvegarder 850 Go de données, de combien de temps aura besoin le programme ?

Après 8 heures, il aura sauvegardé 800 Go de données.
Après 9 heures, il aura sauvegardé 900 Go de données, donc il aura besoin de 9 heures.

**RÉPONSE** Le programme aura besoin de 9 heures pour sauvegarder 850 Go de données.

**b** Si, la nuit dernière, le programme a eu besoin de 6 heures pour compléter la sauvegarde, quelle quantité de données pouvait-il y avoir sur le disque dur ?

Après 5 heures, 500 Go de données ont été stockées.
Après 6 heures, 600 Go de données ont été stockées.

**RÉPONSE** Il y avait ]500, 600] Go de données sur le disque dur.

**c** Le lendemain, 25 Go de données ont été ajoutées sur le disque dur. De combien de temps aura besoin le programme pour sauvegarder toutes les données lors de la nuit suivante ? Justifiez votre réponse.

**1** Quantité de données sur le disque dur
$500 + 25 = 525$
$600 + 25 = 625$
$]525, 625]$

**2** Temps nécessaire pour la sauvegarde
$]525, 600]$, 6 heures
$]600, 625]$, 7 heures

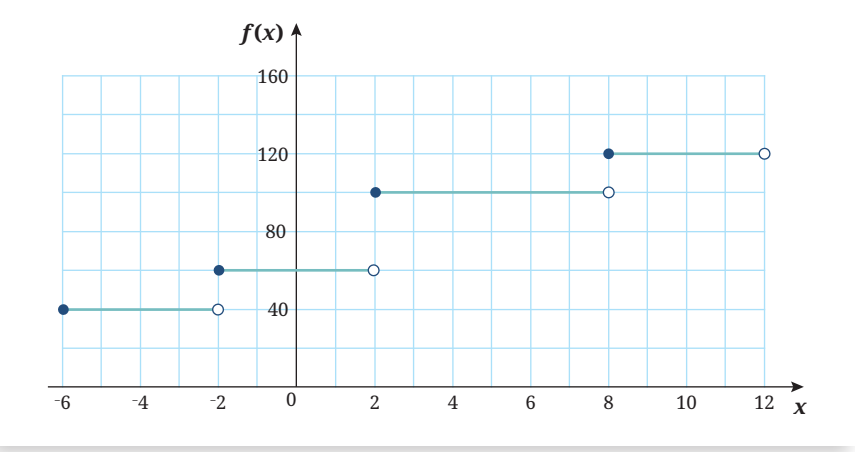
**RÉPONSE** La nuit suivante, le programme aura besoin de 6 heures s'il y a $]525, 600]$ Go de données sur le disque dur et de 7 heures s'il y en a $]600, 625]$.

# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 1

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

★**1.** Quelle est l'image de la fonction représentée par le graphique ci-dessous ?




**a** $[-6, 12[$ **b** $\{40, 60, 100, 120\}$ **c** $]-6, 12]$ **d** $[40, 120]$

★**2.** Quelle est l'équation d'une fonction affine passant par les points $\left(-4, \frac{14}{3}\right)$ et $(12, 18)$ ?

**a** $f(x) = \frac{6x}{5} + \frac{18}{5}$ **b** $f(x) = 0{,}83x + 18$ **c** $f(x) = \frac{5x}{6} + 8$ **d** $f(x) = \frac{5x}{3} - 2$

★**3.** Le nombre de déchets produits par la population d'une municipalité est représenté par la règle suivante : $f(x) = 20\,000x + 700$, où $x$ est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'année et $f(x)$, la quantité de déchets en kilogrammes. Après combien de temps la population de cette municipalité a-t-elle produit 800 500 kg de déchets ?

**a** 39 semaines

**b** 40 semaines

**c** 660 semaines

**d** 16 010 000 700 semaines

**CALCULS**

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

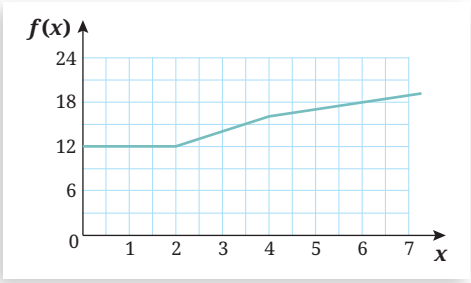
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

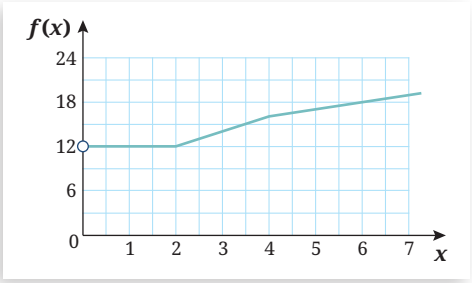
**4.** Lequel des graphiques représente la fonction ci-dessous ?

$$f(x) = \begin{cases} 12, \text{ pour } x \in ]0, 2] \\ 2x + 8, \text{ pour } x \in [2, 4] \\ x + 12, \text{ pour } x \in [4, \infty[ \end{cases}$$

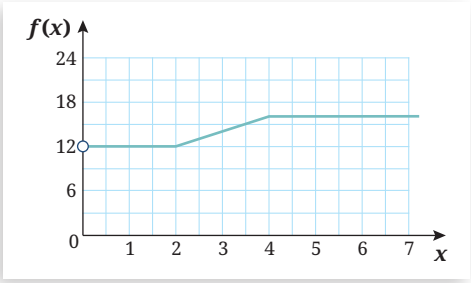
**a**



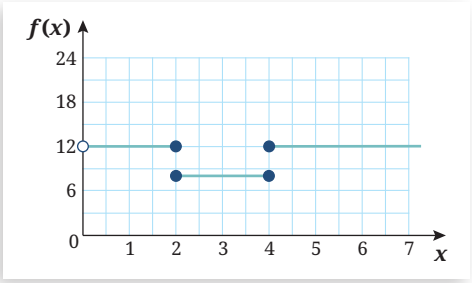

**c**




**b**




**d**



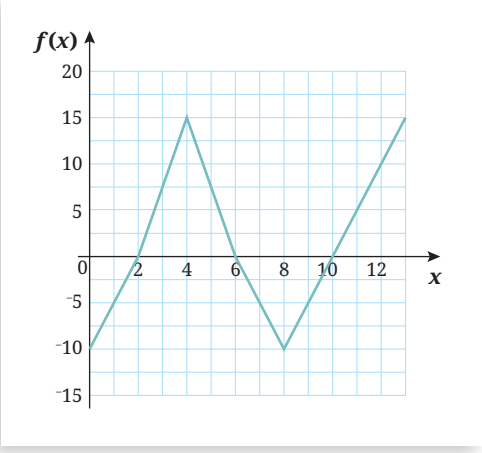

**5.** Sur quel intervalle la fonction suivante est-elle positive ?

**a** $[0, 4] \cup [8, 13]$

**b** $[2, 6] \cup [10, 13]$

**c** $[0, 2] \cup [6, 10]$

**d** $[0, 15]$




## CALCULS

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**6.** La fonction suivante décrit l'altitude d'une navette spatiale en fonction du temps écoulé depuis le lancement.

$$f(x) = \begin{cases} 10x, \text{ pour } x \in [0, 20[ \\ 250x - 4800, \text{ pour } x \in [20, 90[ \\ 700x - 45\,300, \text{ pour } x \in [90, 150[ \\ 2750x - 352\,800, \text{ pour } x \in [150, 220] \end{cases}$$

où $x$ est le temps écoulé depuis le décollage (s)
et $f(x)$ l'altitude de la navette (m)

Après combien de temps la navette atteint-elle une altitude de 39 075 m ?

**1** Essai avec la première partie
$39\,075 = 10x$
$3907{,}5 = x$
$3907{,}5 \notin [0, 20[$

**2** Essai avec la deuxième partie
$39\,075 = 250x - 4800$
$43\,875 = 250x$
$175{,}5 = x$
$175{,}5 \notin [20, 90[$

**3** Essai avec la troisième partie
$39\,075 = 700x - 45\,300$
$84\,375 = 700x$
$120{,}54 \approx x$
$120{,}54 \in [90, 150[$

**RÉPONSE** La navette atteint une altitude de 39 075 m après 120,54 secondes.

★★**7.** Quelle est l'abscisse à l'origine de la fonction $f(x) = \frac{2\square}{7} + 24$ ?

$f(x) = \frac{2\square}{7} + 24$
$0 = \frac{2\square}{7} + 24$
$-24 = \frac{2\square}{7}$
$-168 = 2x$
$-84 = x$

**RÉPONSE** L'abscisse à l'origine de cette fonction est $-84$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**8.** Eugénie participe à plusieurs marathons par année. Son record pour parcourir les 42,2 km réglementaires est de 3 h 21 min. Aujourd'hui, elle a parcouru les 15 premiers kilomètres du marathon en 1 h 12 min et les 10 suivants en 48 minutes. Si elle garde un rythme constant, Eugénie battra-t-elle son record personnel ?

**1** Conversion d'unités

1 h 12 min = 72 min

72 + 48 = 120 min

**2** Règle de la fonction

(72, 15) et (120, 25)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{25 - 15}{120 - 72}$$

$$a = \frac{10}{48}$$

$$a = \frac{5}{24} \text{ ou } a \approx 0{,}21$$

$$f(x) = \frac{5x}{24} + b$$

$$15 = \frac{5(72)}{24} + b$$

$$15 = 15 + b$$

$$0 = b$$

$$f(x) = \frac{5x}{24}$$

**3** Durée de la course

$$f(x) = \frac{5x}{24}$$

$$42{,}2 = \frac{5x}{24}$$

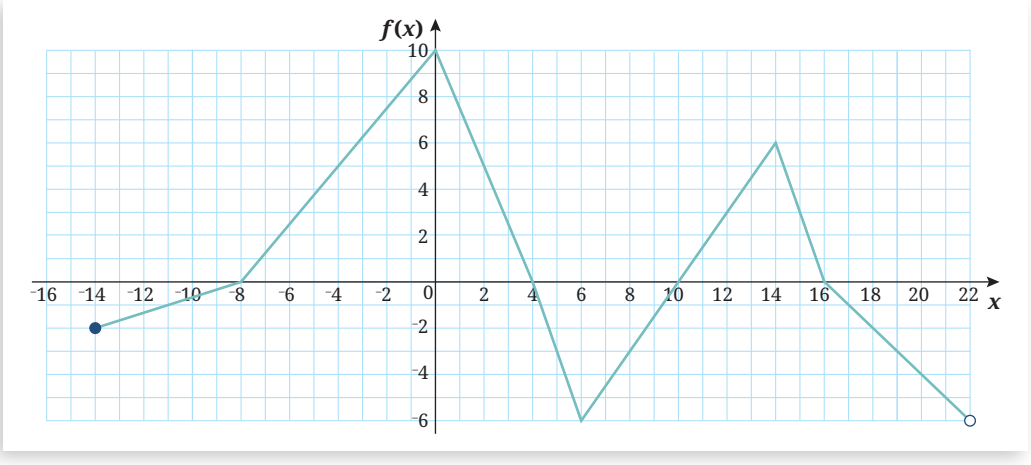
$$1012{,}8 = 5x$$

$$202{,}56 \text{ min} = x$$

$$3 \text{ h } 23 \text{ min} \approx x$$

**RÉPONSE** Eugénie ne battra pas son record personnel aujourd'hui, car elle franchira la ligne d'arrivée deux minutes plus tard.

★★**9.** Effectuez l'analyse complète de la fonction suivante.




**Domaine** $[-14, 22[$ **Image** $[-6, 10]$

**Variation** Croissante pour $x \in [-14, 0] \cup [6, 14]$ et décroissante pour $x \in [0, 6] \cup [14, 22[$

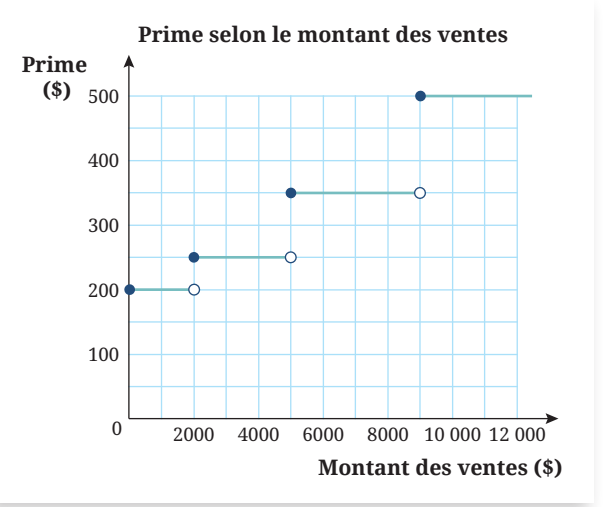
**Signe** Positive pour $x \in [-8, 4] \cup [10, 16]$ et négative pour $x \in [-14, -8] \cup [4, 10] \cup [16, 22[$

**Extremums** Minimum $\{-6\}$ et maximum $\{10\}$

**Abscisse(s) à l'origine** $\{-8, 4, 10, 16\}$ **Ordonnée(s) à l'origine** $\{10\}$

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

**10.** La boutique Toujours jeune vend des vêtements aux jeunes adultes. Dans cette boutique, un vendeur et deux vendeuses accompagnent la clientèle dans ses achats. Afin de les encourager à vendre le plus possible, le propriétaire ajoute une prime à leur salaire en fonction de leurs ventes. Le graphique suivant représente cette situation.




Voici des données relatives au personnel cette semaine.

**Maëly a vendu pour 7438,92 $ de vêtements.**

**Yasmine a obtenu une prime de 250 $.**

**Michael est celui qui a effectué le moins de ventes.**

Au maximum, quel est le montant des ventes de la boutique cette semaine ?

**1** Ventes maximales de Yasmine
Elle a reçu une prime de 250 $, donc a fait des ventes de [2000, 5000[ $.
Au maximum, elle a vendu pour 4999,99 $.

**2** Ventes maximales de Michael
Comme c'est lui qui a fait le moins de ventes, il a vendu pour un maximum de 4999,98 $.

**3** Ventes totales
4999,99 + 4999,98 + 7438,92 = 17 438,89

**RÉPONSE** La boutique a vendu pour un maximum de 17 438,89 $ cette semaine.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **11.** Simon et Julien se rendent dans un magasin pour s'acheter de nouveaux articles de baseball. Avec la nouvelle saison de baseball qui approche, le magasin offre la promotion suivante à sa clientèle.

**Obtenez un rabais de 5 $ pour chaque tranche complète de 40 $.**

Les deux amis décident d'acheter le même bâton. Cependant, Julien décide de s'acheter aussi des souliers à crampons au coût de 130 $.

Lorsqu'ils arrivent à la caisse, Simon obtient un rabais de 20 $ et Julien, un rabais de 40 $.

En limitant au maximum les valeurs possibles, quels sont les prix possibles du bâton qu'ils ont acheté ? Ne prenez pas les taxes en considération dans vos calculs.

**1** Table de valeurs avec les rabais

| Montant des achats ($) | Rabais ($) |
|---|---|
| [0, 40[ | 0 |
| [40, 80[ | 5 |
| [80, 120[ | 10 |
| [120, 160[ | 15 |
| [160, 200[ | 20 |
| [200, 240[ | 25 |
| [240, 280[ | 30 |
| [280, 320[ | 35 |
| [320, 360[ | 40 |

**2** Prix possible du bâton selon le rabais de Simon
Avec un rabais de 20 $, le bâton coûte [160, 200[ $.

**3** Montants possibles de la facture de Julien
Avec un rabais de 40 $, la facture s'élève à [320, 360[ $.

**4** Prix possible du bâton selon la facture de Julien
320 – 130 = 190 $
360 – 130 = 230 $
Prix du bâton : [190, 230[ $

**5** Mise en commun des deux intervalles
[160, 200[ et [190, 230[, donc le prix se situe entre [190, 200[ $.

**RÉPONSE** Les prix possibles du bâton que Julien et Simon ont acheté est [190, 200[ $.

**12.** En prévision de l'hiver qui approche, Raymond aimerait bien acheter un abri pour protéger son entrée contre la neige. Il veut le payer le moins cher possible, mais il hésite entre deux compagnies. Voici la liste de prix qu'il a reçue lorsqu'il s'est présenté aux deux endroits.

**Prix d'un abri en fonction de sa longueur chez la compagnie Abris en folie**

| Longueur de l'abri (m) | Prix ($) |
|---|---|
| 7 | 184 |
| 12 | 294 |
| 25 | 580 |

**Prix d'un abri en fonction de sa longueur chez la compagnie Abris Bergeron**

| Longueur de l'abri (m) | Prix ($) |
|---|---|
| 9 | 241 |
| 15 | 355 |
| 20 | 450 |

La compagnie Abris Bergeron lui a précisé que l'abri qui permettrait de couvrir toute son entrée lui coûterait 393 $.

Chez quelle compagnie Raymond est-il mieux d'acheter son abri s'il veut le payer le moins cher possible ?

**1** Règle de Abris en folie

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{294 - 184}{12 - 7}$$

$$a = \frac{110}{5}$$

$$a = 22$$

$$f(x) = 22x + b$$

$$184 = 22(7) + b$$

$$184 = 154 + b$$

$$30 = b$$

$$f(x) = 22x + 30$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**2** Règle de Abris Bergeron

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{355 - 241}{15 - 9}$$

$$a = \frac{114}{6}$$

$$a = 19$$

$f(x) = 19x + b$

$241 = 19(9) + b$

$241 = 171 + b$

$70 = b$

$f(x) = 19x + 70$

**3** Longueur de l'abri de Raymond

$f(x) = 19x + 70$

$393 = 19x + 70$

$323 = 19x$

$17 \text{ m} = x$

**4** Prix de l'abri chez Abris en folie

$f(x) = 22x + 30$

$f(17) = 22(17) + 30$

$f(17) = 374 + 30$

$f(17) = 404$

**5** Comparaison des prix

$393 < 404$

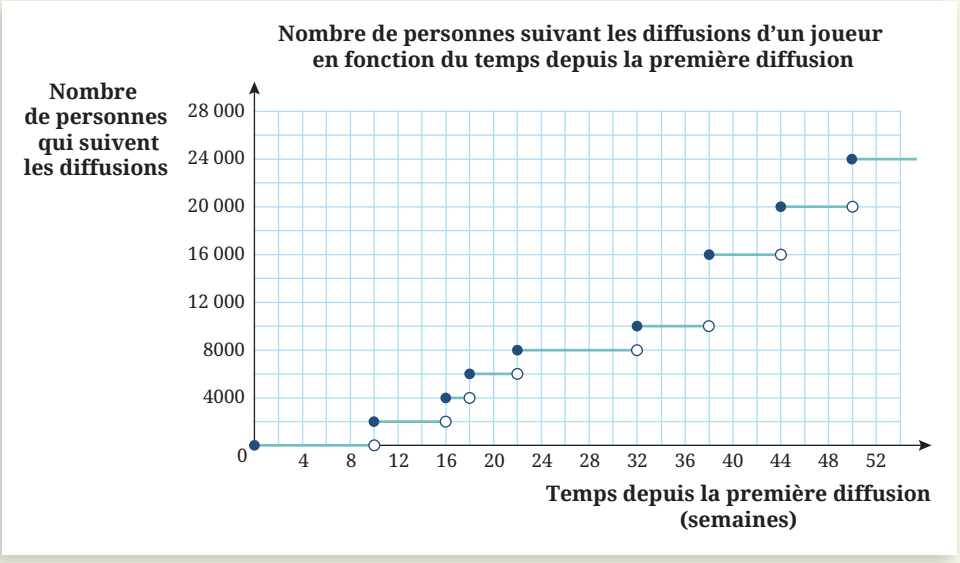
**RÉPONSE** Raymond devrait acheter son abri chez Abris Bergeron.

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## JULKITU ET LES JEUX VIDÉO

Depuis quelques années, plusieurs jeunes tentent de gagner leur vie à l'aide des jeux vidéo. De nombreuses plateformes en ligne permettent de diffuser en direct leurs parties pour qu'un auditoire puisse les visionner. Julkitu, de son nom de joueur, travaille très fort pour essayer d'obtenir des revenus à partir des diffusions de ses parties. Deux de ses amis réussissent à vivre de leurs diffusions. L'un d'eux a 150 000 personnes qui le suivent et il gagne 33 000 $ par année. L'autre gagne un salaire annuel de 41 400 $ et a 190 000 personnes qui le suivent. De plus, en se fiant à l'évolution de ses collègues, il a construit ce graphique.




Si la tendance se maintient, quel salaire Julkitu peut-il espérer gagner par année dans 50 semaines ?

**1** Nombre de personnes suivant les diffusions après 50 semaines

24 000 personnes

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**2** Règle du salaire

(150 000, 33 000) et (190 000, 41 400)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{41\,400 - 33\,000}{190\,000 - 150\,000}$$

$$a = \frac{8400}{40\,000}$$

$$a = 0{,}21$$

$$f(x) = 0{,}21x + b$$

$$33\,000 = 0{,}21(150\,000) + b$$

$$33\,000 = 31\,500 + b$$

$$1500 = b$$

$$f(x) = 0{,}21x + 1500$$

**3** Salaire après 60 semaines

$$f(x) = 0{,}21x + 1500$$

$$f(24\,000) = 0{,}21(24\,000) + 1500$$

$$f(24\,000) = 5040 + 1500$$

$$f(24\,000) = 6540$$

**RÉPONSE** Dans 50 semaines, Julkitu peut espérer gagner 6540 $ par année.

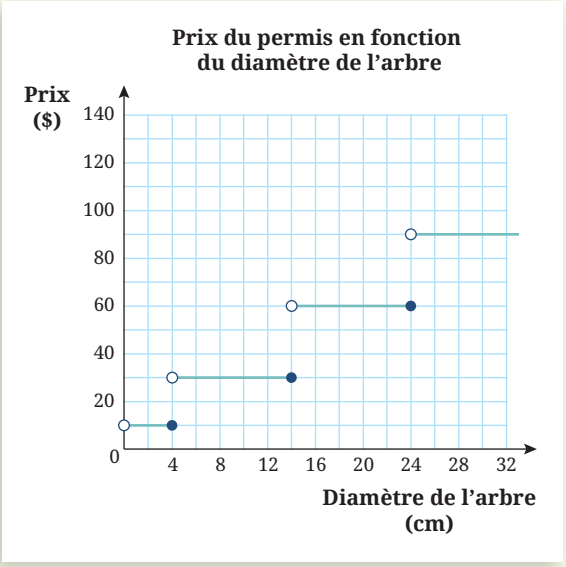
# SITUATION-PROBLÈME

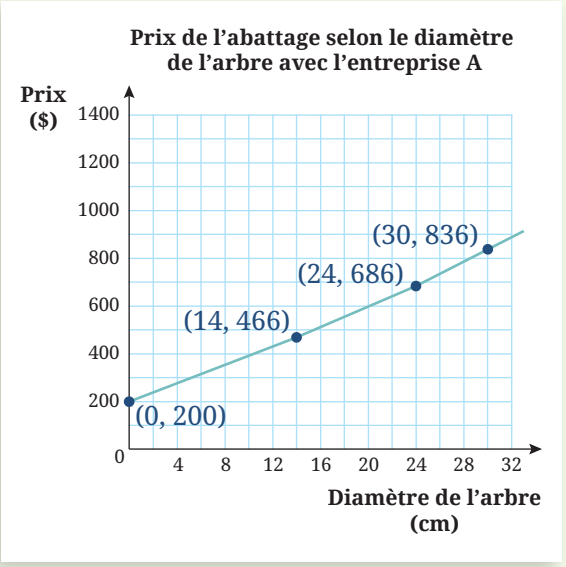
CD1

## LA COUPE D'ARBRES

Mathis s'est rendu compte qu'un arbre dans sa cour est malade. Il désire donc le faire couper afin que la maladie ne se propage pas aux arbres environnants. Pour ce faire, il doit se procurer un permis auprès de la ville, lequel lui coûtera une certaine somme en fonction de la grosseur du tronc de l'arbre. Puisqu'il ne s'y connaît pas trop dans ce domaine, Mathis demande conseil à sa voisine Mégane. Cette dernière a aussi fait abattre un arbre malade sur son terrain l'année dernière. Elle a choisi l'entreprise A et la coupe lui a coûté 642 $. De son côté, Mathis envisage de retenir les services de l'entreprise B, qui offre des prix compétitifs.

Mathis obtient son permis et se rend compte qu'il l'a payé exactement le même prix que Mégane.




**Prix de l'entreprise B**

$$f(x) = \begin{cases} 15x + 250, \text{ pour } x \in \,]0, 10] \\ 18x + 220, \text{ pour } x \in \,]10, 20] \\ 22x + 140, \text{ pour } x \in \,]20, 30] \end{cases}$$

où $x$ représente le diamètre de l'arbre (cm) et $f(x)$ le prix pour l'abattage ($)

Quelle entreprise Mathis devrait-il choisir ? Justifiez votre réponse.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**1** Règle de l'entreprise A

Partie 1

(0, 200) et (14, 466)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{466 - 200}{14 - 0}$

$a = \dfrac{266}{14}$

$a = 19$

$f(x) = 19x + b$

$200 = 19(0) + b$

$200 = b$

$f(x) = 19x + 200$

Partie 2

(14, 466) et (24, 686)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{686 - 466}{24 - 14}$

$a = \dfrac{220}{10}$

$a = 22$

$f(x) = 22x + b$

$466 = 22(14) + b$

$466 = 308 + b$

$158 = b$

$f(x) = 22x + 158$

Partie 3

(24, 686) et (30, 836)

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{836 - 686}{30 - 24}$

$a = \dfrac{150}{6}$

$a = 25$

$f(x) = 25x + b$

$686 = 25(24) + b$

$686 = 600 + b$

$86 = b$

$f(x) = 25x + 86$

Partie 3 (*suite*)

$$f(x) = \begin{cases} 19x + 200, \text{ pour } x \in [0, 14] \\ 22x + 158, \text{ pour } x \in [14, 24] \\ 25x + 86, \text{ pour } x \in [24, \infty[ \end{cases}$$

**2** Diamètre de l'arbre

$642 = 19x + 200$

$442 = 19x$

$23{,}26 \text{ cm} \approx x$

$23{,}26 \text{ cm} \notin [0, 14]$

$642 = 22x + 158$

$484 = 22x$

$22 \text{ cm} = x$

$22 \in [14, 24]$

L'arbre a un diamètre de 22 cm.

**3** Prix du permis

Pour un diamètre de 22 cm, le prix s'élève à 60 $.

**4** Diamètre de l'arbre de Mathis

Le diamètre mesure ]14, 24].

(À partir d'ici, plusieurs réponses possibles)

**5** Prix de l'abattage avec l'entreprise A

Puisque le diamètre de l'arbre de Mathis est ]14, 24] cm, le prix s'élèvera à ]466, 686] $.

**6** Prix de l'abattage avec l'entreprise B

$f(14) = 18(14) + 220$

$f(14) = 252 + 220$

$f(14) = 472$

$f(24) = 22(24) + 140$

$f(24) = 528 + 140$

$f(24) = 668$

Le prix sera de ]472, 668] $

**RÉPONSE**

Si le diamètre de l'arbre est plus près de 14 cm, Mathis devrait choisir l'entreprise A, mais si le diamètre est plus près de 24 cm, il devrait choisir l'entreprise B.

# FEUILLE DE NOTES

## Propriétés des fonctions

**Domaine :** valeurs de $x$
**Image :** valeurs de $f(x)$
**Ordonnée à l'origine :** valeur de $f(x)$ quand $x = 0$
**Abscisse(s) à l'origine :** valeur(s) de $x$ quand $f(x) = 0$
**Variation strictement croissante :** valeurs de $x$ quand les deux variables varient dans le même sens
**Variation strictement décroissante :** valeurs de $x$ quand les deux variables varient dans le sens contraire
**Variation constante :** valeurs de $x$ quand la fonction est horizontale
**Signe positif :** fonction au-dessus ou sur l'axe des $x$
**Signe négatif :** fonction au-dessous ou sur l'axe des $x$
**Maximum :** valeur de $f(x)$ la plus élevée
**Minimum :** valeur de $f(x)$ la plus basse

## Fonctions définies par parties

**Trouver la règle**

1. Déterminer le nombre de parties et trouver la règle de chacune d'elles.
2. Regrouper les règles à l'aide d'une accolade.
3. Déterminer le domaine de chaque partie et l'inscrire à côté de la règle à l'aide du langage mathématique.

**Tracer le graphique**

1. Déterminer les coordonnées des points aux extrémités de chaque partie.
2. Placer les points dans le plan cartésien.
3. Relier tous les points à l'aide de segments. Ne pas oublier de poursuivre les segments pour les parties tendant vers l'infini.

## Fonctions du premier degré

$$f(x) = ax + b$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**Trouver la règle**

1. Calculer le taux de variation et le remplacer dans l'équation.
2. Prendre un point de départ et remplacer le $x$ et le $f(x)$ par les coordonnées d'un point pour trouver la valeur de $b$.

**Tracer le graphique**

1. Placer l'ordonnée à l'origine.
2. Trouver un deuxième point à l'aide du taux de variation.

## Fonctions en escalier

Elles peuvent être représentées par :

- une table de valeurs dont les valeurs en $x$ sont des intervalles ;
- un graphique ayant l'allure d'un escalier avec des points ouverts et fermés.

**Propriétés**

L'image est composée de valeurs entre accolades.

La variation est basée sur l'allure du graphique : soit croissante sur le domaine, soit décroissante sur le domaine.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

2

# LES FONCTIONS PÉRIODIQUE, EXPONENTIELLE ET QUADRATIQUE


| | |
|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | 62 |
| **2.1** La fonction périodique | 65 |
| **2.2** La fonction exponentielle | 72 |
| **2.3** La fonction quadratique | 86 |
| **Consolidation du chapitre 2** | 97 |
| **Situation d'application – L'héritage de Julianne** | 106 |
| **Situation-problème – La quête du guerrier** | 108 |
| **Feuille de notes** | 110 |

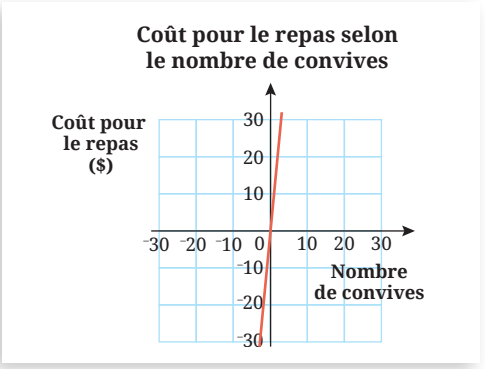
## À QUOI ÇA SERT ?

Comme expliqué précédemment, les fonctions sont présentes partout au quotidien. Les fonctions périodiques sont souvent associées aux situations qui sont répétitives comme les battements cardiaques et les ondes, tandis que les fonctions exponentielles sont généralement associées à l'étude de la croissance de bactéries ou de la fluctuation d'un placement financier. Les fonctions quadratiques, quant à elles, sont à la base du mouvement des projectiles, entre autres.

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

**1.** Identifiez la variable indépendante et la variable dépendante de chacune des situations suivantes.

**a**




**Variable indépendante**

Nombre de convives

**Variable dépendante**

Coût pour le repas ($)

**b**

| ALTITUDE D'UN PARACHUTISTE SELON LE TEMPS | | | |
|---|---|---|---|
| TEMPS (min) | 2 | 4 | 6 |
| ALTITUDE (m) | 2500 | 1500 | 500 |

**Variable indépendante**

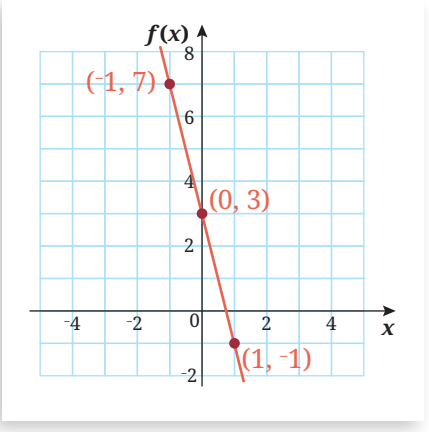
Temps (min)

**Variable dépendante**

Altitude (m)

**2.** Écrivez la règle des droites suivantes.

**a**




**1** $(x_1, y_1) = (^-1, 7)$
$(x_2, y_2) = (1, ^-1)$

**2** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{^-1 - 7}{1 - ^-1}$

$a = \dfrac{^-8}{2}$

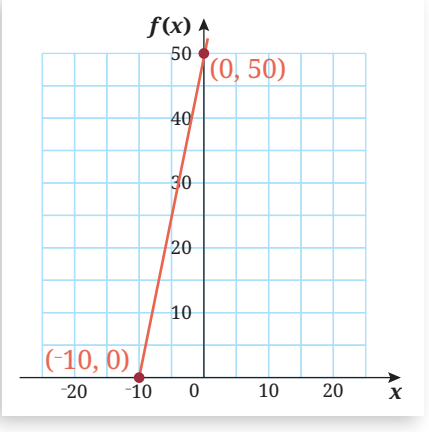
$a = ^-4$

**3** $b = 3$

**4** $f(x) = ^-4x + 3$

**RÉPONSE** $f(x) = ^-4x + 3$

**b**




**1** $(x_1, y_1) = (^-10, 0)$
$(x_2, y_2) = (0, 50)$

**2** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{50 - 0}{0 - ^-10}$

$a = \dfrac{50}{10}$

$a = 5$

**3** $b = 50$

**4** $f(x) = 5x + 50$

**RÉPONSE** $f(x) = 5x + 50$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Déterminez la règle des fonctions représentées par chaque table de valeurs.

**a**

| $x$ | 4 | 8 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-30$ | $^-60$ | $^-90$ | $^-120$ |

1 $(x_1, y_1) = (4, ^-30)$
$(x_2, y_2) = (8, ^-60)$

2 $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{^-60 - ^-30}{8 - 4}$

$a = \dfrac{^-30}{4}$

$a = \dfrac{^-15}{2}$ ou $^-7{,}5$

3 $f(x) = \dfrac{^-15}{2}x + b$

$^-30 = \dfrac{^-15}{2}(4) + b$

$^-30 = ^-30 + b$

$0 = b$

4 $f(x) = \dfrac{^-15}{2}x$ ou $f(x) = ^-7{,}5x$

**RÉPONSE** $f(x) = \dfrac{^-15}{2}x$ ou $f(x) = ^-7{,}5x$

**b**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{60}{7}$ | $\frac{50}{7}$ | $\frac{40}{7}$ | $\frac{30}{7}$ |

1 $(x_1, y_1) = \left(2, \dfrac{60}{7}\right)$
$(x_2, y_2) = \left(3, \dfrac{50}{7}\right)$

2 $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{\frac{50}{7} - \frac{60}{7}}{3 - 2}$

$a = \dfrac{\frac{^-10}{7}}{1}$

$a = \dfrac{^-10}{7}$ ou $^-1{,}43$

3 $f(x) = \dfrac{^-10}{7}x + b$

$\dfrac{60}{7} = \dfrac{^-10}{7}(2) + b$

$\dfrac{60}{7} = \dfrac{^-20}{7} + b$

$\dfrac{80}{7}$ ou $11{,}43 = b$

4 $f(x) = \dfrac{^-10}{7}x + \dfrac{80}{7}$ ou
$f(x) = ^-1{,}43x + 11{,}43$

**RÉPONSE** $f(x) = \dfrac{^-10}{7}x + \dfrac{80}{7}$ ou $f(x) = ^-1{,}43x + 11{,}43$

★**4.** Calculez la valeur de $f(6)$ dans les fonctions suivantes.

**a** $f(x) = 2x - 1$

$f(6) = 2(6) - 1$
$f(6) = 12 - 1$
$f(6) = 11$

**RÉPONSE** $f(6) = 11$

**b** $f(x) = \dfrac{\square}{5} + 2{,}5$

$f(6) = \dfrac{6}{5} + 2{,}5$

$f(6) = 1{,}2 + 2{,}5$
$f(6) = 3{,}7$

**RÉPONSE** $f(6) = 3{,}7$

★★**5.** Simplifiez les expressions suivantes en utilisant les lois des exposants. Écrivez votre réponse avec des exposants positifs et des racines carrées, s'il y a lieu.

**a** $3^{-8} \cdot 3^2$

$3^{-8} \cdot 3^2 = 3^{-8+2} = 3^{-6} = \dfrac{1}{3^6}$

**RÉPONSE** $\dfrac{1}{3^6}$

**b** $(4^5)^6$

$(4^5)^6 = 4^{5 \cdot 6} = 4^{30}$

**RÉPONSE** $4^{30}$

**c** $3^{\frac{8}{3}}$

$3^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{3^8}$

**RÉPONSE** $\sqrt[3]{3^8}$

**d** $\dfrac{5^8}{5^6}$

$\dfrac{5^8}{5^6} = 5^{8-6} = 5^2$

**RÉPONSE** $5^2$

**e** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1^2}{3^2} = \dfrac{1}{3^2}$

**RÉPONSE** $\dfrac{1}{3^2}$

**f** $\dfrac{4^5}{4^{-3}}$

$\dfrac{4^5}{4^{-3}} = 4^{5-(-3)} = 4^8$

**RÉPONSE** $4^8$

**g** $\dfrac{(2^4 \cdot 3^2)^4}{2^{-3}}$

$\dfrac{(2^4 \cdot 3^2)^4}{2^{-3}} = \dfrac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{-3}} = 2^{19} \cdot 3^8$

**RÉPONSE** $2^{19} \cdot 3^8$

**h** $\dfrac{(6^3 \cdot 2^2)^{-3}}{6^{-2}}$

$\dfrac{(6^3 \cdot 2^2)^{-3}}{6^{-2}} = \dfrac{6^{-9} \cdot 2^{-6}}{6^{-2}} = 6^{-7} \cdot 2^{-6} = \dfrac{1}{6^7 \cdot 2^6}$

**RÉPONSE** $\dfrac{1}{6^7 \cdot 2^6}$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

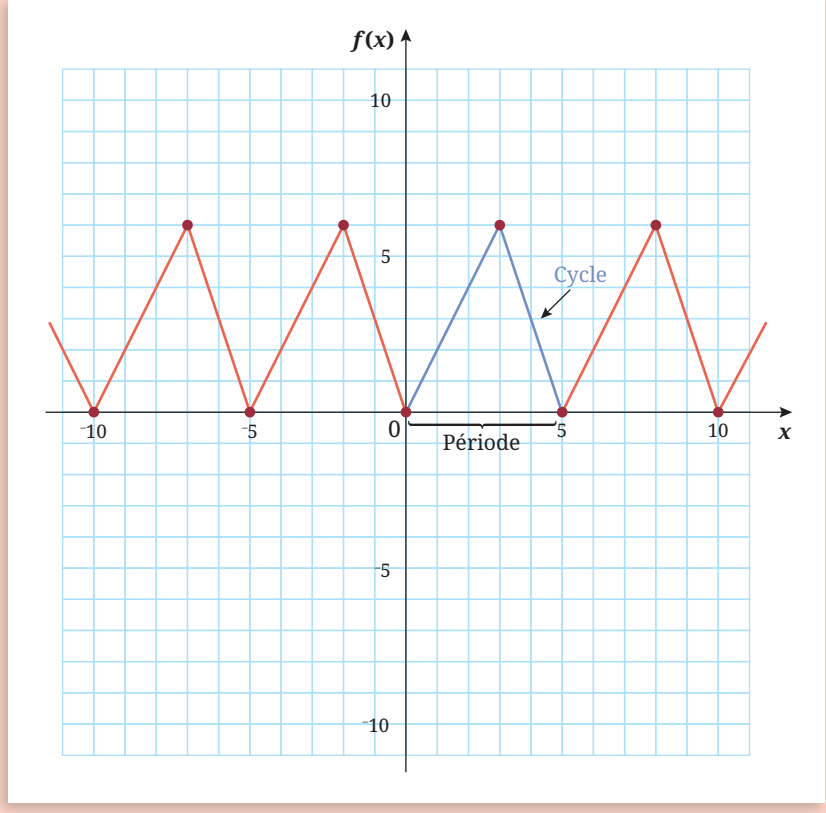
# 2.1 LA FONCTION PÉRIODIQUE

## Reconnaître une fonction périodique

Une **fonction périodique** produit dans un graphique un motif de manière répétitive. Dans une fonction périodique, un **cycle** fait référence au motif qui se répète tandis que la **période** correspond à la longueur du cycle.

**EXEMPLE**

**La fonction suivante est périodique.**



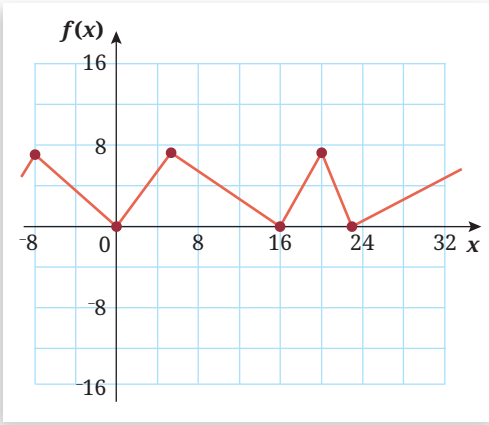

Dans cette fonction périodique, le cycle est représenté par le motif bleu qui se répète en orange. On aurait pu prendre n'importe quel autre motif situé sur le graphique ; par exemple, celui qui va de $-5$ à 0. Pour déterminer la période, il faut prendre deux points correspondants dans deux motifs qui se suivent et calculer la différence entre les deux valeurs de $x$ de ces points. Pour définir la période, on prend toujours la valeur positive de l'écart trouvé.

| | |
|---|---|
| **1.** Écrire les coordonnées de deux points correspondants dans deux motifs qui se suivent. | $(x_1, y_1) = (0, 0)$<br>$(x_2, y_2) = (5, 0)$ |
| **2.** Calculer la période entre deux points correspondants de l'axe des $x$ dans deux cycles qui se suivent. | $x_2 - x_1 = 5 - 0 = 5$<br>La période de la fonction est 5. |

# EXERCICES

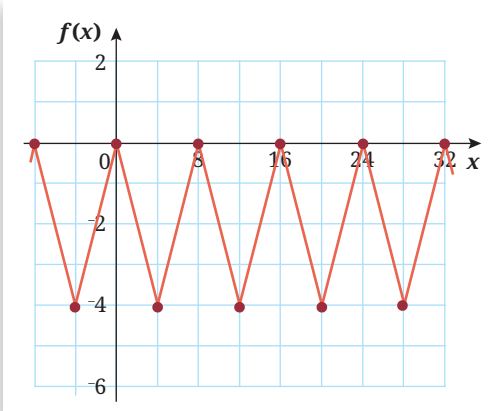
★ Déterminez si les fonctions suivantes sont périodiques. Si tel est le cas, précisez-en la période.

**a**




**RÉPONSE** La fonction n'est pas périodique.

**b**

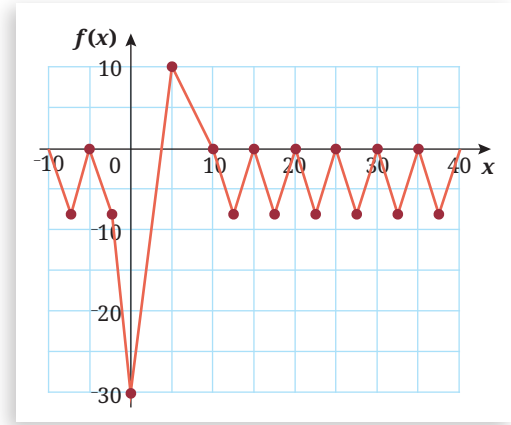



1 $(x_1, y_1) = (0, 0)$
$(x_2, y_2) = (8, 0)$

2 $x_2 - x_1 = 8 - 0 = 8$

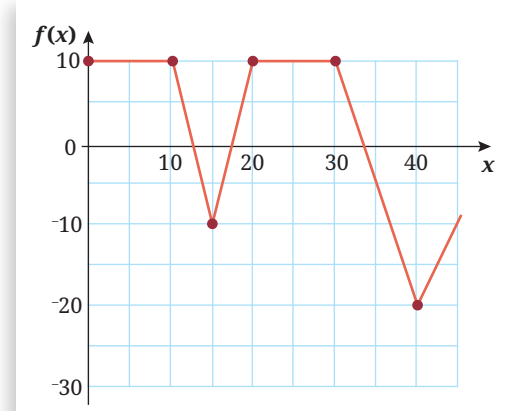
**RÉPONSE** La fonction est périodique et la période est 8.

**c**




**RÉPONSE** La fonction n'est pas périodique.

**d**




**RÉPONSE** La fonction n'est pas périodique.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

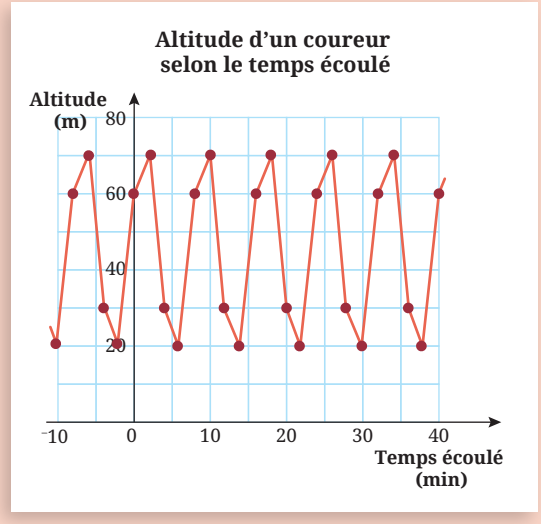
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Résoudre une situation à l'aide du graphique d'une fonction périodique

En observant le comportement d'une fonction périodique dans un graphique, il est possible de résoudre une situation. Il suffit de déduire la coordonnée manquante d'un point.

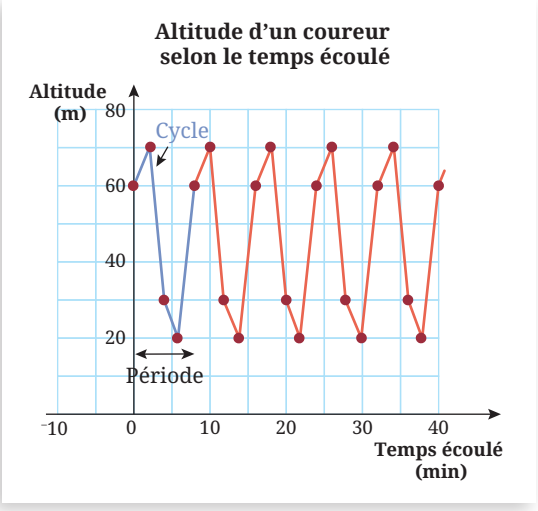
**EXEMPLE**

**Pendant une compétition de course d'endurance, les participants et participantes effectuent un parcours en boucle. Voici un graphique qui représente l'altitude, en mètres, à laquelle un coureur se trouve selon le temps écoulé, en minutes, depuis le début de sa course.**




**Déterminez l'altitude de ce coureur à la 46e minute.**

**1.** Repérer le cycle et déterminer la période.

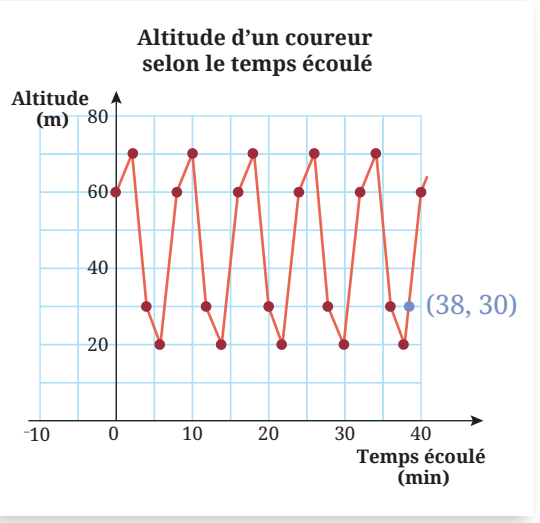



Le cycle correspond au motif bleu qui se répète en orange sur le graphique. Par exemple, il débute à (0, 60) et se termine à (8, 60).

**Période :** $(x_1, y_1) = (0, 60)$
$(x_2, y_2) = (8, 60)$

$x_2 - x_1 = 8 - 0 = 8$

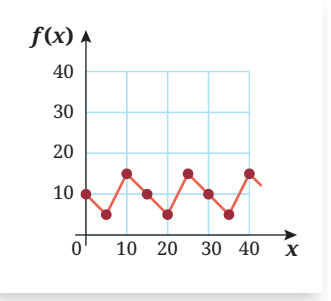
La période est 8.

| | |
|---|---|
| **2.** Soustraire la période de la valeur de $x$ donnée (ou les additionner, selon le cas) jusqu'à obtenir une valeur de $x$ qui se trouve dans le plan cartésien. | Cycle connu : [0, 40]<br>Valeur de $x$ donnée : 46<br>46 – 8 = 38<br>Les abscisses 38 et 46 ont la même ordonnée. |
| **3.** À partir du graphique, trouver la coordonnée manquante du point recherché. | Si $x = 38$, $f(x) = 30$.<br>  |
| **4.** Rapporter la coordonnée trouvée à la valeur de $x$ donnée. | Si (38, 30), alors (46, 30).<br>À la 46e minute, le coureur se trouve à une altitude de 30 m. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## EXERCICES

★★ **1.** Observez la représentation graphique ci-contre d'une fonction périodique.




**a** Écrivez la période de la fonction.
La période est 15.

**b** Déterminez la valeur de $f(x)$ pour chacune des valeurs de $x$ suivantes.

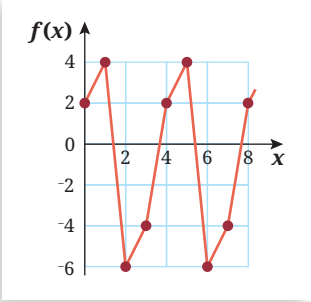
1) $f(50) =$ 5
2) $f(70) =$ 15
3) $f(90) =$ 10
4) $f(100) =$ 15

**c** Indiquez pour quelles valeurs de $x$ la fonction atteint un maximum. {10, 25, 40, ...}

**d** Indiquez pour quelles valeurs de $x$ la fonction atteint un minimum. {5, 20, 35, ...}

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Observez la représentation graphique de la fonction périodique ci-contre.




**a** Écrivez la période de la fonction.

La période est 4.

**b** Déterminez la valeur de $f(x)$ pour chacune des valeurs de $x$ suivantes.

1) $f(8) =$ 2

2) $f(11) =$ -4

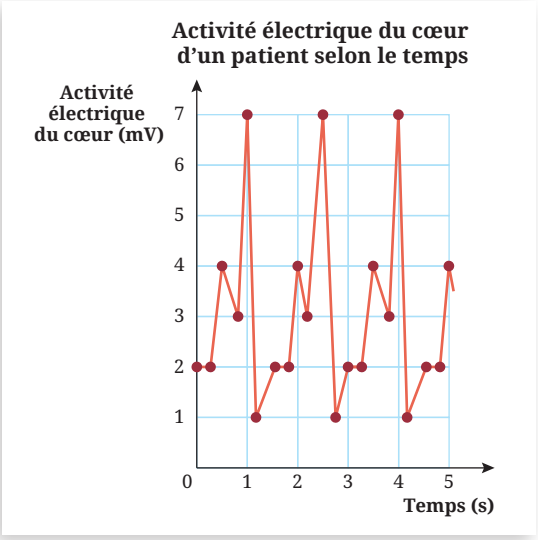
3) $f(14) =$ -6

4) $f(21) =$ 4

**c** Indiquez pour quelles valeurs de $x$ la fonction atteint un maximum. {1, 5, 9, ...}

**d** Indiquez pour quelles valeurs de $x$ la fonction atteint un minimum. {2, 6, 10, ...}

★★**3.** On observe l'activité électrique du cœur d'un patient selon le temps et on remarque qu'il s'agit d'une fonction périodique.




**a** Si un cycle complet correspond à un battement de cœur, déterminez le rythme cardiaque du patient en battements par minute.

**1** Période

$3 - 1{,}5 = 1{,}5$ s

**2** Nombre de battements dans une minute (60 s)

$\frac{1 \text{ batt.}}{1{,}5 \text{ s}} = \frac{? \text{ batt.}}{60 \text{ s}}$ $\quad \frac{60}{1{,}5} = 40$

**RÉPONSE** Le rythme cardiaque du patient est de 40 battements par minute.

**b** Indiquez à quel(s) moment(s) l'intensité des battements cardiaques est minimale.

Après 1,25 s ; 2,75 s ; 4,25 s ; …

**c** Écrivez à quel(s) moment(s) l'intensité des battements cardiaques est maximale.

Après 1 s ; 2,5 s ; 4 s ; …

**d** Indiquez à quel(s) moment(s) l'intensité des battements cardiaques est constante.

Entre 0 s et 0,25 s ; entre 1,5 s et 1,75 s ; entre 3 s et 3,25 s ; …

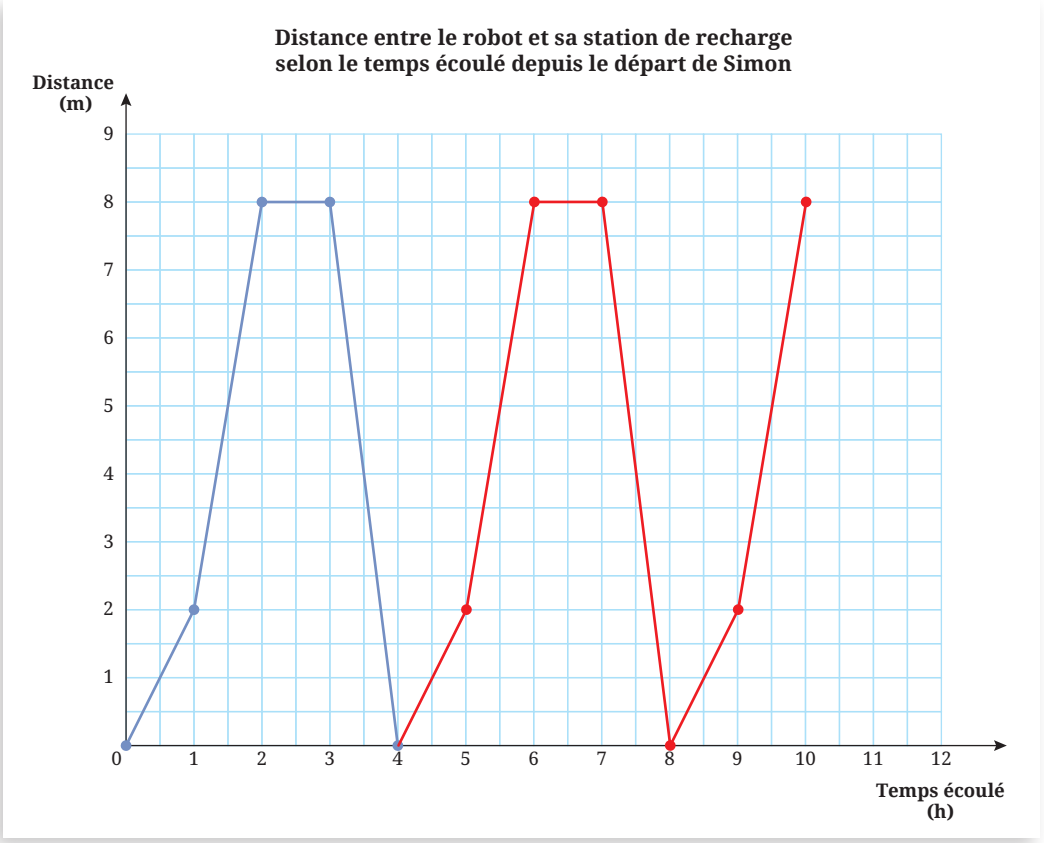
**e** À quelle intensité le cœur du patient bat-il après 5,75 secondes ?

Après 5,75 secondes, le cœur du patient bat à une intensité de 1.

**f** Sur quelles valeurs du domaine le cœur du patient bat-il à une intensité de 1 ?

{1,25 ; 2,75 ; 4,25…}

★★ **4.** Simon est passionné par la robotique et, pour s'amuser, il a programmé un robot afin qu'il effectue des rondes en continu dans sa maison lorsqu'il est absent. Pour être en mesure de réaliser cet exploit, le robot passe la nuit sur une station de recharge ; il s'agit donc de son point de départ. Voici un graphique qui représente la distance, en mètres, entre le robot et sa station de recharge selon le temps écoulé, en heures, depuis le départ de Simon.




**a** Sachant que la période de la fonction est 4, complétez le graphique précédent jusqu'à $x = 10$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**b** Effectuez l'analyse complète de la fonction que vous avez tracée et précisez ce que chaque réponse signifie dans le contexte.

**Domaine** [0, 10]. Cela signifie que le robot fonctionne entre 0 et 10 heures, selon le temps durant lequel s'absente Simon.

**Image** [0, 8]. Cela signifie que, lorsque le robot se situe sur sa station, la distance est de 0 m et, qu'au cours de ses rondes, il peut s'éloigner jusqu'à 8 m de sa station.

**Variation** Croissante pour $x \in [0, 2] \cup [4, 6] \cup [8, 10]$, constante pour $x \in [2, 3] \cup [6, 7]$ et décroissante pour $x \in [3, 4] \cup [7, 8]$. Cela signifie que, selon le temps écoulé depuis le départ de Simon, le robot s'éloigne de la station (croissante), reste à la même distance (constante) ou se rapproche (décroissante).

**Signe** Positive pour $x \in [0, 10]$. Cela signifie que la distance entre le robot et sa station de recherche est toujours positive (elle ne peut pas être négative).

**Extremums** Maximum $\{8\}$ et minimum $\{0\}$. Cela signifie que la plus petite distance correspond au moment où le robot est sur sa station et que la plus grande distance possible entre le robot et sa station est de 8 m.

**Abscisse(s) à l'origine** $\{0, 4, 8\}$. Cela signifie qu'au début, qu'après 4 heures et qu'après 8 heures, le robot revient à sa station de recharge.

**Ordonnée(s) à l'origine** $\{0\}$. Cela signifie que c'est le point de départ du robot.

**c** À quelle distance de sa station de recharge se trouvera le robot lorsqu'il y aura 21 heures d'écoulées depuis le départ de Simon ?

**1** Cycle connu : [0, 10]
Valeur de $x$ donnée : 21
$21 - 4 = 17$
$17 - 4 = 13$
$13 - 4 = 9$
Les abscisses 9 et 21 ont la même ordonnée.

**2** Si $x = 9$, $f(x) = 2$.

**3** Si (9, 2), alors (21, 2).

**RÉPONSE** Après 21 heures, le robot se trouvera à une distance de 2 m de sa station de recharge.

# 2.2 LA FONCTION EXPONENTIELLE

## Définir la fonction exponentielle

Une **fonction exponentielle** se traduit ainsi.

$$f(x) = a(c)^x$$

où $a$ correspond à la valeur initiale
et $c$ correspond à la base qui est toujours plus grande que 0.
L'exposant $x$ est appliqué uniquement à la base $c$.

La fonction exponentielle ne croise pas l'axe des $x$, donc ne passe jamais par (0, 0).

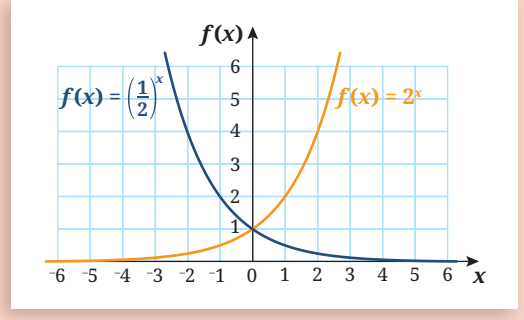
**Note :** Si la valeur initiale est égale à 1, la fonction s'écrit sous la forme $f(x) = c^x$.

**EXEMPLE 1**

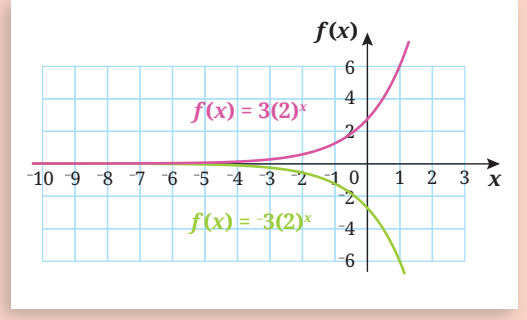
**Les fonctions ci-contre sont exponentielles.**

$f(x) = 2^x$, $f(x) = 8(4)^x$ et $f(x) = -3\left(\frac{1}{5}\right)^x$

**EXEMPLE 2**




**EXEMPLE 3**




La table de valeurs d'une fonction exponentielle est caractéristique puisque les valeurs des ordonnées sont obtenues en multipliant toujours par la valeur du $c$ si l'accroissement des abscisses est de 1.

**EXEMPLE 4**

$f(x) = 2^x$

| | $x$ | $f(x)$ | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | |
| +1 | 1 | 2 | ×2 |
| +1 | 2 | 4 | ×2 |
| +1 | 3 | 8 | ×2 |
| +1 | 4 | 16 | ×2 |
| +1 | 5 | 32 | ×2 |

**EXEMPLE 5**

$f(x) = 10(3)^x$

| | $x$ | $f(x)$ | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 10 | |
| +1 | 1 | 30 | ×3 |
| +1 | 2 | 90 | ×3 |
| +1 | 3 | 270 | ×3 |
| +1 | 4 | 810 | ×3 |
| +1 | 5 | 2430 | ×3 |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Pour tracer une fonction exponentielle, il faut connaître la règle et utiliser une table de valeurs.

**EXEMPLE**

**Tracer le graphique de la fonction exponentielle suivante.**

$f(x) = 4(2)^x$

**1.** Construire une table de valeurs à partir de la règle, dans laquelle on remplace différentes valeurs de $x$.

**Note :** Pour simplifier le traçage, il est recommandé d'utiliser de petites valeurs entières de $x$ comme $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$.

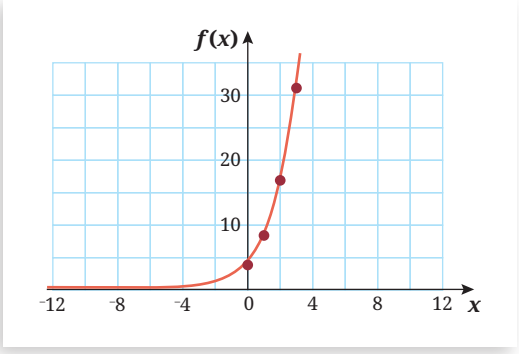
$f(x) = 4(2)^x$

$f(x) = 4(2)^0 = 4$ $\quad$ $f(x) = 4(2)^2 = 16$

$f(x) = 4(2)^1 = 8$ $\quad$ $f(x) = 4(2)^3 = 32$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 8 |
| 2 | 16 |
| 3 | 32 |

**2.** Placer directement les points dans un plan cartésien et les relier à l'aide d'une courbe.




## EXERCICES

★**1.** Écrivez la valeur initiale et la base de chacune des fonctions exponentielles ci-dessous.

**a** $f(x) = 3(6)^x$ — **Valeur initiale** 3 — **Base** 6

**b** $f(x) = 2(3)^x$ — **Valeur initiale** 2 — **Base** 3

**c** $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ — **Valeur initiale** 1 — **Base** $\frac{1}{2}$

**d** $f(x) = -4(5)^x$ — **Valeur initiale** -4 — **Base** 5

**e** $f(x) = -(10)^x$ — **Valeur initiale** -1 — **Base** 10

**f** $f(x) = 0{,}8(2{,}5)^x$ — **Valeur initiale** 0,8 — **Base** 2,5

## ★2. Indiquez si les tables de valeurs suivantes représentent des fonctions exponentielles.

**a**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-1$ | $^-2$ | $^-4$ | $^-8$ | $^-16$ |

☑ Oui ☐ Non

**b**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 |

☑ Oui ☐ Non

**c**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-50$ | $^-50$ | $^-50$ | $^-50$ | $^-50$ |

☐ Oui ☑ Non

**d**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,062 5 |

☑ Oui ☐ Non

## ★3. Remplissez la table de valeurs de chaque fonction exponentielle.

**a** $f(x) = 4^x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 | 16 | 64 |

**b** $f(x) = 5(3)^x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 15 | 45 | 135 |

**c** $f(x) = {}^-(5)^x$

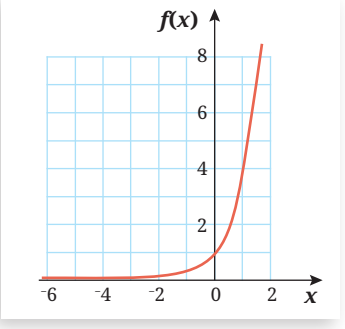
| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-1$ | $^-5$ | $^-25$ | $^-125$ |

**d** $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^x$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{27}{32}$ |

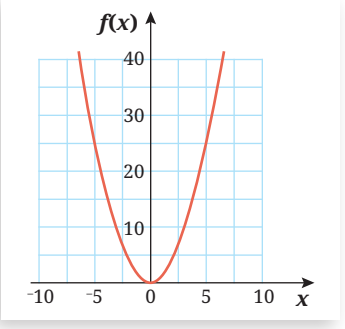
## ★4. Déterminez si les graphiques suivants représentent des fonctions exponentielles.

**a**



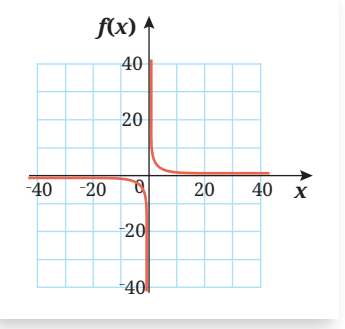

☑ Oui ☐ Non

**b**



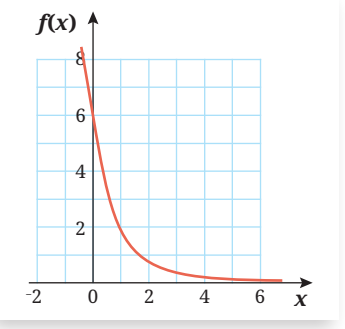

☐ Oui ☑ Non

**c**




☐ Oui ☑ Non

**d**



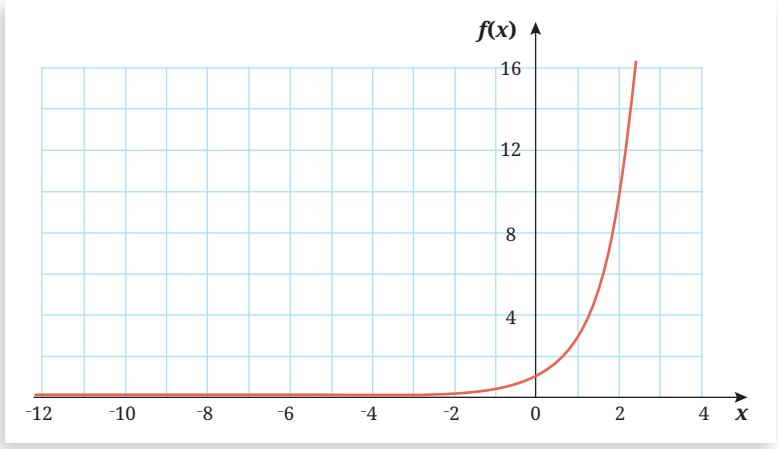

☑ Oui ☐ Non

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**5.** Effectuez l'analyse complète des fonctions exponentielles ci-dessous.

**a** $f(x) = 3^x$




**Domaine** $\mathbb{R}$ **Image** $]0, \infty[$

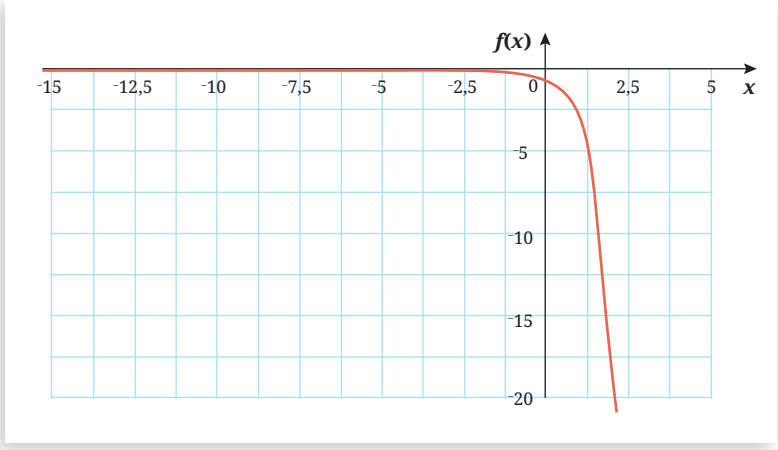
**Variation** Croissante sur le domaine

**Signe** Positive sur le domaine

**Extremums** Aucun

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune **Ordonnée(s) à l'origine** $\{1\}$

**b** $f(x) = -(5)^x$




**Domaine** $\mathbb{R}$ **Image** $]-\infty, 0[$

**Variation** Décroissante sur le domaine

**Signe** Négative sur le domaine

**Extremums** Aucun

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune **Ordonnée(s) à l'origine** $\{-1\}$

★★**6.** Tracez le graphique des fonctions exponentielles suivantes.

**a** $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$

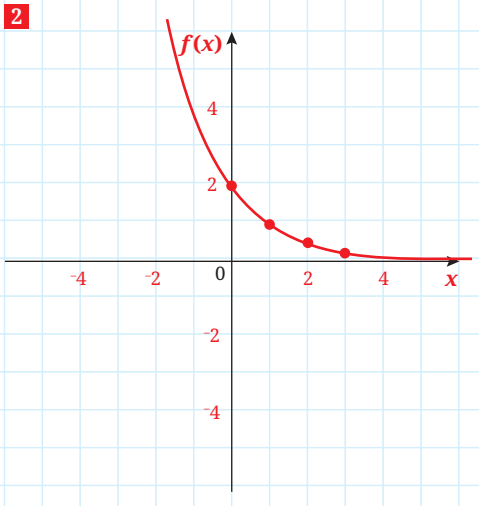
**1** $f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2$ $\quad f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}5$

$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$ $\quad f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}25$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0,5 |
| 3 | 0,25 |

**2**




**b** $f(x) = -2(4)^x$

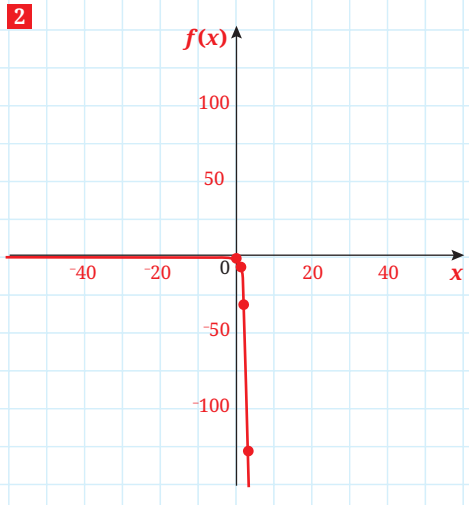
**1** $f(x) = -2(4)^x$

$f(x) = -2(4)^0 = -2$ $\quad f(x) = -2(4)^2 = -32$

$f(x) = -2(4)^1 = -8$ $\quad f(x) = -2(4)^3 = -128$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | -2 |
| 1 | -8 |
| 2 | -32 |
| 3 | -128 |

**2**




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

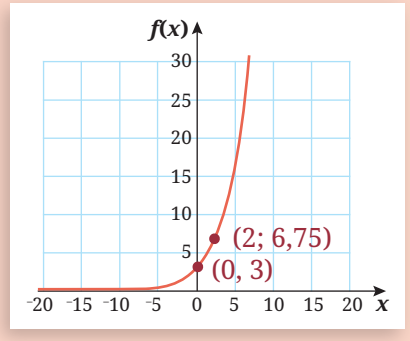
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Rechercher la règle d'une fonction exponentielle de base à partir de points

Il est possible de trouver la règle d'une fonction exponentielle si on connaît l'ordonnée à l'origine et un point aléatoire sur la courbe.

**EXEMPLE**

**Quelle est la règle d'une fonction exponentielle dont l'ordonnée à l'origine est 3 et qui passe par le point (2; 6,75) ?**




| | |
|---|---|
| **1.** Trouver la valeur de $c$ en utilisant la valeur de $a$ et les coordonnées de l'autre point donné. | $f(x) = a(c)^x$<br>$f(x) = 3(c)^x$<br>$6{,}75 = 3(c)^2$<br>$2{,}25 = c^2$<br>$1{,}5 = c$ |
| **2.** Écrire la règle de la fonction. | $f(x) = 3(1{,}5)^x$<br>La règle de la fonction est $f(x) = 3(1{,}5)^x$. |

## EXERCICES

★★ **1.** Déterminez la règle des fonctions exponentielles suivantes.

**a** Une fonction qui passe par les points $(0, {}^-10)$ et $(3, {}^-6)$.

**1** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = {}^-10(c)^x$
$-6 = {}^-10(c)^3$
$0{,}6 = c^3$
$0{,}84 = c$

**2** $f(x) = {}^-10(0{,}84)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = {}^-10(0{,}84)^x$.

**b** Une fonction qui passe par le point $({}^-4, 8)$ et dont l'ordonnée à l'origine est 9.

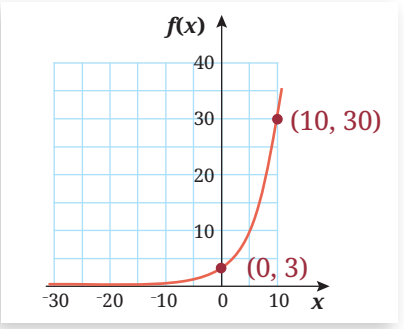
**1** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 9(c)^x$
$8 = 9(c)^{-4}$
$0{,}\overline{8} = c^{-4}$
$0{,}\overline{8} = \frac{1}{\square^4}$
$c^4 = \frac{1}{0{,}\overline{8}}$
$c^4 = 1{,}13$
$c = 1{,}03$

**2** $f(x) = 9(1{,}03)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 9(1{,}03)^x$.

★★**2.** Écrivez la règle des fonctions exponentielles représentées graphiquement.

**a**

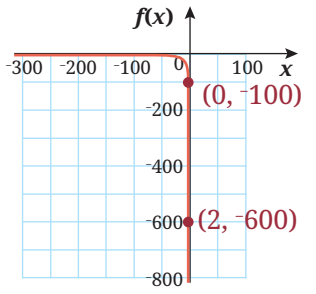



**1** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 3(c)^x$
$30 = 3(c)^{10}$
$10 = c^{10}$
$1{,}26 = c$

**2** $f(x) = 3(1{,}26)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 3(1{,}26)^x$.

**b**




**1** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = -100(c)^x$
$-600 = -100(c)^2$
$6 = c^2$
$2{,}45 = c$

**2** $f(x) = -100(2{,}45)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -100(2{,}45)^x$.

★★**3.** Écrivez la règle des fonctions exponentielles représentées par les tables de valeurs ci-dessous.

**a**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -3 | -6 | -12 | -24 |

**1** Si $(0, -3)$ et $(1, -6)$, alors $a = -3$.
$f(x) = a(c)^x$
$f(x) = -3(c)^x$
$-6 = -3(c)^1$
$2 = c$

**2** $f(x) = -3(2)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -3(2)^x$.

**b**

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -20 | -28 | -39,2 | -54,88 |

**1** Si $(0, -20)$ et $(1, -28)$, alors $a = -20$.
$f(x) = a(c)^x$
$f(x) = -20(c)^x$
$-28 = -20(c)$
$1{,}4 = c$

**2** $f(x) = -20(1{,}4)^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -20(1{,}4)^x$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



## Résoudre des problèmes à l'aide de la fonction exponentielle à partir d'une valeur donnée

La fonction exponentielle est très utile pour résoudre des problèmes basés sur la croissance où la décroissance d'une situation.

Le $a$ correspond à la valeur initiale, donc à l'ordonnée à l'origine de la fonction.

Le $c$ correspond à la base de la fonction, et donc un $c$ qui est égal à 1 correspond à une valeur de 100 %. On applique la croissance ou la décroissance au 100 %.

**EXEMPLE 1**

**Si la valeur double, on fait 100 % • 2 = 200 %, alors $c = 2$.**

**EXEMPLE 2**

**Si la valeur diminue de 30 %, on fait 100 % − 30 % = 70 %, alors $c = 0{,}7$.**

**EXEMPLE 3**

**Au début d'une expérience scientifique, il y a 25 bactéries dans une boîte de Petri. On remarque que les bactéries se développent en doublant chaque heure. Combien y aura-t-il de bactéries dans la boîte de Petri 6 heures après le début de l'expérience ?**

| | |
|---|---|
| **1.** Identifier les variables. | $x$ : nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience<br>$f(x)$ : nombre de bactéries dans la boîte de Petri |
| **2.** Trouver la règle en déterminant les valeurs de $a$ et de $c$.<br>$a$ : valeur initiale<br>$c$ : base (par rapport au 100 %) | Au départ, il y a 25 bactéries, alors $a = 25$.<br>Le nombre de bactéries double chaque heure : 100 % • 2 = 200 %, alors $c = 2$. |
| **3.** Écrire la règle de la fonction. | $f(x) = a(c)^x$<br>$f(x) = 25(2)^x$ |
| **4.** Résoudre le problème. | $f(6) = ?$<br>$f(x) = 25(2)^x$<br>$f(6) = 25(2)^6$<br>$f(6) = 25(64)$<br>$f(6) = 1600$ bactéries<br>Dans 6 heures, il y aura 1600 bactéries dans la boîte de Petri. |

Lorsqu'on connaît la règle d'une fonction exponentielle et qu'une valeur de $f(x)$ est donnée, il est possible de résoudre le problème en trouvant la valeur de $x$ qui est associée à la valeur de $f(x)$ donnée.

**EXEMPLE 4**

**Un scientifique s'intéresse à la culture bactérienne et isole 25 bactéries dans un contenant. Après combien de temps y aura-t-il 800 bactéries dans le contenant si le nombre de bactéries double chaque heure ?**

| | |
|---|---|
| **1.** Identifier les variables. | $x$ : nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience<br>$f(x)$ : quantité de bactéries |
| **2.** Trouver la règle en déterminant les valeurs de $a$ et de $c$.<br>$a$ : valeur initiale<br>$c$ : base (par rapport au 100 %) | Au départ, il y a 25 bactéries, alors $a = 25$.<br>Le nombre de bactéries double chaque heure : $100\,\% \cdot 2 = 200\,\%$, alors $c = 2$. |
| **3.** Écrire la règle de la fonction. | $f(x) = a(c)^x$<br>$f(x) = 25(2)^x$ |
| **4.** Résoudre le problème en déterminant la valeur de $x$ correspondant à la valeur de $f(x)$ donnée. Pour y parvenir, procéder par essais et erreurs en substituant à $x$ différentes valeurs pour obtenir une égalité. | Si $f(x) = 800$, $x = ?$<br>$f(x) = 25(2)^x$<br>$800 = 25(2)^x$<br>$32 = (2)^x$<br>$32 \neq 2^2$<br>$32 \neq 2^3$<br>$32 \neq 2^4$<br>$32 = 2^5$<br>Alors, $x = 5$ quand $f(x) = 800$.<br>Il y aura 800 bactéries dans le contenant après 5 heures. |

## EXERCICES

★**1.** Indiquez la valeur de $c$ relative à chaque énoncé.

**a** La valeur double. $c = 2$

**b** La valeur quadruple. $c = 4$

**c** La valeur augmente de 10 %. $c = 1{,}1$

**d** La valeur diminue de moitié. $c = 0{,}5$

**e** La valeur diminue de 30 %. $c = 0{,}7$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Dans un laboratoire de recherche, on fait la culture de bactéries. Au départ, seulement 10 bactéries sont introduites dans une gelée qui leur permettra de tripler chaque heure.

**a** Calculez le nombre de bactéries qu'il y aura dans la gelée après 3 heures.

**1** $x$ : nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience
$f(x)$ : nombre de bactéries dans la gelée

**2** Au départ, il y a 10 bactéries dans la gelée, alors $a = 10$.
Le nombre de bactéries triple chaque heure : $100\,\% \cdot 3 = 300\,\%$, alors $c = 3$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 10(3)^x$

**4** $f(3) = ?$
$f(x) = 10(3)^x$
$f(3) = 10(3)^3$
$f(3) = 10(27)$
$f(3) = 270$

**RÉPONSE** Après 3 heures, il y aura 270 bactéries dans la gelée.

**b** Calculez le nombre de bactéries qu'il y aura dans la gelée après 4 heures.

$f(4) = ?$
$f(x) = 10(3)^x$
$f(4) = 10(3)^4$
$f(4) = 10(81)$
$f(4) = 810$

**RÉPONSE** Après 4 heures, il y aura 810 bactéries dans la gelée.

★★**3.** Les mouches à fruits sont des insectes qui prolifèrent très rapidement lorsque les conditions sont propices à leur développement. Dans un entrepôt, on dénombre 30 mouches à fruits et on sait que leur nombre double chaque jour.

**a** Quelle est la règle qui traduit cette situation ?

**1** $x$ : nombre de jours écoulés depuis le dénombrement des mouches à fruits
$f(x)$ : nombre de mouches à fruits dans l'entrepôt

**2** Au départ, il y a 30 mouches à fruits dans l'entrepôt, alors $a = 30$.
Le nombre de mouches à fruits double chaque jour : $100\,\% \cdot 2 = 200\,\%$, alors $c = 2$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 30(2)^x$

**RÉPONSE** La règle qui traduit la situation est $f(x) = 30(2)^x$.

**b** À ce rythme, combien y aura-t-il de mouches à fruits dans cet entrepôt après une semaine ?

$f(7) = ?$
$f(x) = 30(2)^x$
$f(7) = 30(2)^7$
$f(7) = 30(128)$
$f(7) = 3840$

**RÉPONSE** Après une semaine, il y aura 3840 mouches à fruits dans cet entrepôt.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**4.** Un scientifique possède un échantillon d'une substance radioactive. Cette substance se désintègre et sa masse diminue de moitié chaque heure. Quelle sera la masse de l'échantillon après 3 heures, si au départ, sa masse était de 100 g ?

**1** $x$ : nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience
$f(x)$ : masse de l'échantillon (g)

**2** Au départ, la masse de l'échantillon est de 100 g, alors $a = 100$.
La masse de l'échantillon diminue de moitié chaque heure : $100\,\% \div 2 = 50\,\%$, alors $c = 0{,}5$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 100(0{,}5)^x$

**4** $f(3) = ?$
$f(x) = 100(0{,}5)^x$
$f(3) = 100(0{,}5)^3$
$f(3) = 100(0{,}125)$
$f(3) = 12{,}5$

**RÉPONSE** Après 3 heures, la masse de l'échantillon sera de 12,5 g.

★★**5.** Andréanne investit 5500 $ dans un placement qui augmente de 10 % par année. Dans combien d'années son placement vaudra-t-il environ 8053 $ ?

**1** $x$ : nombre d'années écoulées
$f(x)$ : valeur du placement ($)

**2** Au départ, il y a 5500 $, alors $a = 5500$.
La valeur du placement augmente de 10 % chaque année : $100\,\% + 10\,\% = 110\,\%$, alors $c = 1{,}1$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 5500(1{,}1)^x$

**4** Si $f(x) = 8053$, $x = ?$
$f(x) = 5500(1{,}1)^x$
$8053 = 5500(1{,}1)^x$
$1{,}46 = (1{,}1)^x$
Alors, $x = 4$ quand $f(x) = 8053$.

$1{,}46 \neq 1{,}1^2$
$1{,}46 \neq 1{,}1^3$
$1{,}46 = 1{,}1^4$

**RÉPONSE** Le placement d'Andréanne vaudra 8053 $ dans 4 ans.

★★**6.** Un village de 13 400 habitants et habitantes voit sa population diminuer de 2 % par année en raison d'un phénomène d'exode rural.

**a** Combien y aura-t-il d'habitants et habitantes dans ce village dans 15 ans ?

**1** $x$ : nombre d'années écoulées
$f(x)$ : nombre d'habitants et habitantes dans le village

**2** Au départ, il y a 13 400 habitants et habitantes, alors $a = 13\,400$.
Ce nombre diminue de 2 % chaque année : 100 % – 2 % = 98 %, alors $c = 0{,}98$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 13\,400(0{,}98)^x$

**4** $f(15) = ?$
$f(x) = 13\,400(0{,}98)^x$
$f(15) = 13\,400(0{,}98)^{15}$
$f(15) = 13\,400(0{,}74)$
$f(15) = 9916$

**RÉPONSE** Dans 15 ans, il y aura 9916 habitants et habitantes dans ce village.

**b** Dans combien d'années ce village comptera-t-il 8086 habitants et habitantes ?

$f(x) = 8086$, $x = ?$
$f(x) = 13\,400(0{,}98)^x$
$8086 = 13\,400(0{,}98)^x$
$0{,}60 = (0{,}98)^x$

$0{,}60 \neq 0{,}98^{20}$
$0{,}60 \neq 0{,}98^{23}$
$0{,}60 = 0{,}98^{25}$

Alors, $x = 25$ quand $f(x) = 8086$.

**RÉPONSE** Le village comptera 8086 habitants et habitantes dans 25 ans.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**7.** Gaëlle a économisé une somme de 8000 $ en travaillant dans un restaurant. Elle décide d'investir son argent dans un placement qui augmente de 10 % par année.

**a** Complétez la table de valeurs suivante pour représenter comment ce placement évoluera au fil du temps.

| NOMBRE D'ANNÉES ÉCOULÉES DEPUIS LE PLACEMENT | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| VALEUR DU PLACEMENT ($) | 8000 | 8800 | 9680 | 10 640 | 11 712,80 |

**1** Règle de la fonction

La somme placée au départ par Gaëlle est 8000 $, alors $a = 8000$.
La valeur du placement augmente de 10 % par année : 100 % + 10 % = 110 %, alors $c = 1{,}1$.
La règle est donc $f(x) = 8000(1{,}1)^x$.

**2** Valeur du placement selon le nombre d'années écoulées

Après 1 an
$f(x) = 8000(1{,}1)^1$
$f(x) = 8000(1{,}1)$
$f(x) = 8800\,\$$

Après 2 ans
$f(x) = 8000(1{,}1)^2$
$f(x) = 8000(1{,}21)$
$f(x) = 9680\,\$$

Après 3 ans
$f(x) = 8000(1{,}1)^3$
$f(x) = 8000(1{,}33)$
$f(x) = 10\,640\,\$$

Après 4 ans
$f(x) = 8000(1{,}1)^4$
$f(x) = 8000(1{,}46)$
$f(x) = 11\,712{,}80\,\$$

**b** Dans combien d'années le placement de Gaëlle vaudra-t-il environ 17 149 $ ?

$f(x) = 17\,149$, $x = ?$
$f(x) = 8000(1{,}1)^x$
$17\,149 = 8000(1{,}1)^x$
$2{,}14 = (1{,}1)^x$

$2{,}14 \neq 1{,}1^5$
$2{,}14 \neq 1{,}1^6$
$2{,}14 \neq 1{,}1^7$
$2{,}14 = 1{,}1^8$

Alors, $x = 8$ quand $f(x) = 17\,149$.

**RÉPONSE** Le placement de Gaëlle vaudra 17 149 $ dans 8 ans.

# 2.3 LA FONCTION QUADRATIQUE

## Définir la fonction quadratique

Une **fonction quadratique** polynomiale du second degré s'écrit sous la forme suivante.

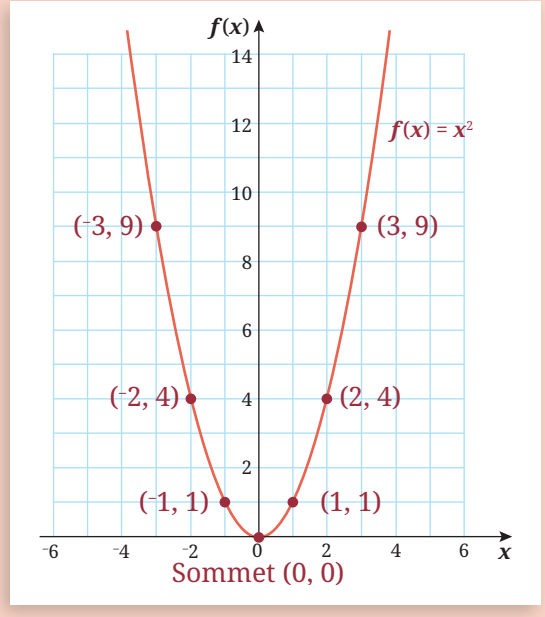
$$f(x) = ax^2$$

Le graphique de la fonction quadratique se traduit par une parabole dont le sommet est centré à l'origine (0, 0).

L'axe de symétrie se trouve au centre de la fonction quadratique et a comme équation $x = 0$.

**EXEMPLE**

$$f(x) = x^2$$




Dans la table de valeurs d'une fonction quadratique, les accroissements des accroissements sont constants.

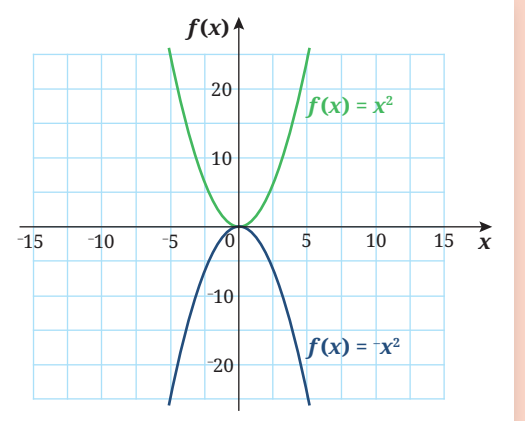
| $x$ | $f(x)$ | | |
|---|---|---|---|
| -3 | 9 | | |
| | | −5 | |
| -2 | 4 | | +2 |
| | | −3 | |
| -1 | 1 | | +2 |
| | | −1 | |
| 0 | 0 | | +2 |
| | | +1 | |
| 1 | 1 | | +2 |
| | | +3 | |
| 2 | 4 | | +2 |
| | | +5 | |
| 3 | 9 | | |

(+1 entre chaque valeur de $x$ consécutive)

Le signe de $a$ indique le sens de l'ouverture de la parabole.

**EXEMPLE 1**

**Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut. Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.**

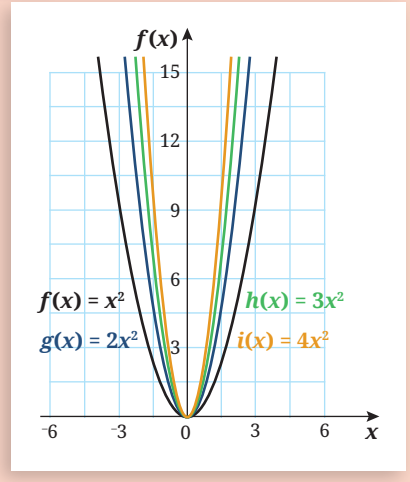



© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

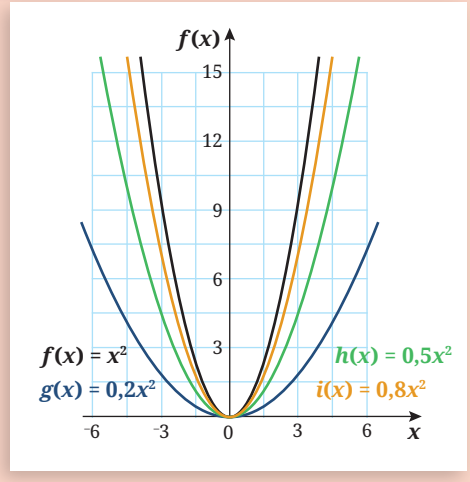
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

La valeur de $a$ influence l'allure de la courbe. Plus cette valeur est près de 0, plus la parabole est ouverte et plus elle s'éloigne de 0, plus la parabole s'amincit.

**EXEMPLE 2**




**EXEMPLE 3**




Les valeurs d'une fonction quadratique possèdent une caractéristique bien spécifique : il y a toujours deux abscisses pour une même ordonnée et ces deux abscisses sont de signes opposés.

**EXEMPLE 4**

$f(x) = x^2$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

**EXEMPLE 5**

$f(x) = -5x^2$

| $x$ | $-10$ | $-5$ | 0 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-500$ | $-125$ | 0 | $-125$ | $-500$ |

## EXERCICES

★**1.** Écrivez ce que vaut $a$ dans les fonctions quadratiques suivantes et déterminez si les paraboles sont ouvertes vers le haut ou vers le bas.

**a** $f(x) = x^2$ — $a = 1$ ; la parabole est ouverte vers le haut.

**b** $f(x) = -x^2$ — $a = -1$ ; la parabole est ouverte vers le bas.

**c** $f(x) = 24{,}5x^2$ — $a = 24{,}5$ ; la parabole est ouverte vers le haut.

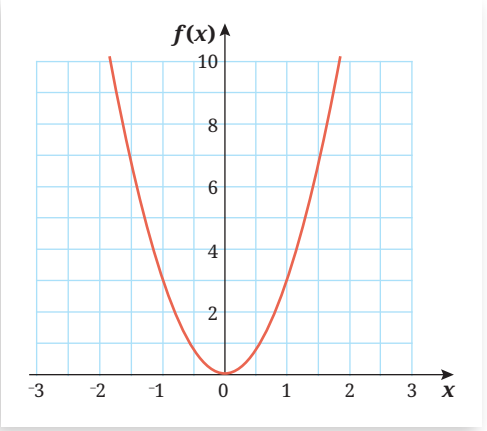
**d** $f(x) = \frac{3}{2}x^2$ — $a = \frac{3}{2}$ ; la parabole est ouverte vers le haut.

**e** $f(x) = -0{,}8x^2$ — $a = -0{,}8$ ; la parabole est ouverte vers le bas.

**f** $f(x) = -97x^2$ — $a = -97$ ; la parabole est ouverte vers le bas.

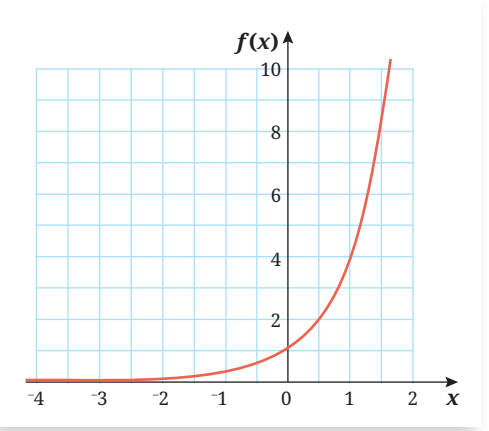
★2. Indiquez si les graphiques suivants représentent des fonctions quadratiques.

**a**



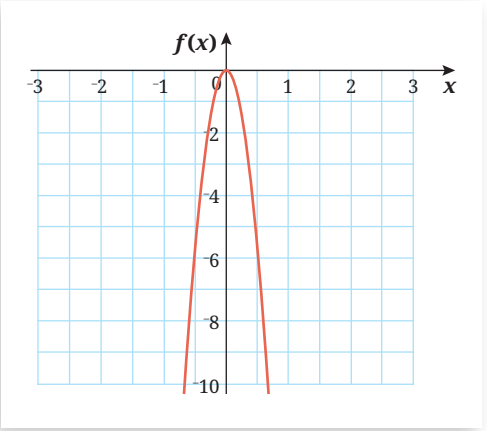

☑ Oui ☐ Non

**c**



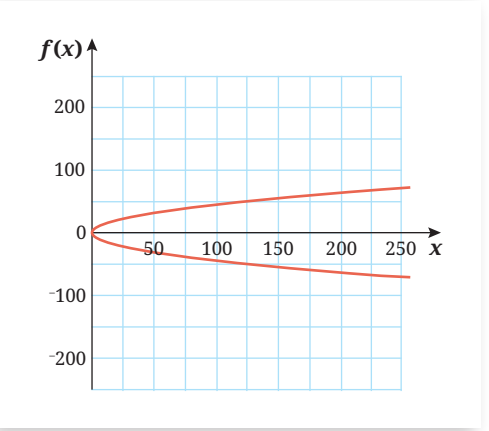

☐ Oui ☑ Non

**b**




☑ Oui ☐ Non

**d**




☐ Oui ☑ Non

★★3. Indiquez si le couple (2, 20) appartient à chacune des fonctions ci-dessous.

**a** $f(x) = 5x^2$

Si $x = 2$, $f(x) = ?$
$f(x) = 5(2)^2$
$f(x) = 5(4)$
$f(x) = 20$

**RÉPONSE** Oui, le couple (2, 20) appartient à la fonction.

**b** $f(x) = -5x^2$

Si $x = 2$, $f(x) = ?$
$f(x) = -5(2)^2$
$f(x) = -5(4)$
$f(x) = -20$

**RÉPONSE** Non, le couple (2, 20) n'appartient pas à la fonction.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**4.** Déterminez la valeur de $f(x)$ quand $x = 3$.

**a** $f(x) = 2x^2$

$f(x) = 2x^2$
$f(x) = 2(3)^2$
$f(x) = 2(9)$
$f(x) = 18$

**RÉPONSE** $f(x) = 18$

**b** $f(x) = \frac{\square^2}{2}$

$f(x) = \frac{\square^2}{2}$
$f(x) = \frac{(3)^2}{2}$
$f(x) = \frac{9}{2}$ ou $f(x) = 4{,}5$

**RÉPONSE** $f(x) = \frac{9}{2}$ ou $f(x) = 4{,}5$

★★**5.** Calculez les valeurs de $x$ de chacune des fonctions ci-dessous si $f(x) = 100$.

**a** $f(x) = 4x^2$

$f(x) = 4x^2$
$100 = 4x^2$
$25 = x^2$
$\pm 5 = x$

**RÉPONSE** $x = 5$ et $x = -5$

**b** $f(x) = \frac{3}{2}x^2$

$f(x) = \frac{3}{2}x^2$
$100 = \frac{3}{2}x^2$
$\frac{200}{3} = x^2$
$\pm 8{,}16 = x$

**RÉPONSE** $x = 8{,}16$ et $x = -8{,}16$

★**6.** Remplissez la table de valeurs de chaque fonction quadratique.

**a** $f(x) = 3x^2$

| $x$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 48 | 12 | 0 | 12 | 48 |

**b** $f(x) = -7x^2$

| $x$ | $-6$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-252$ | $-63$ | 0 | $-63$ | $-252$ |

**c** $f(x) = -0{,}6x^2$

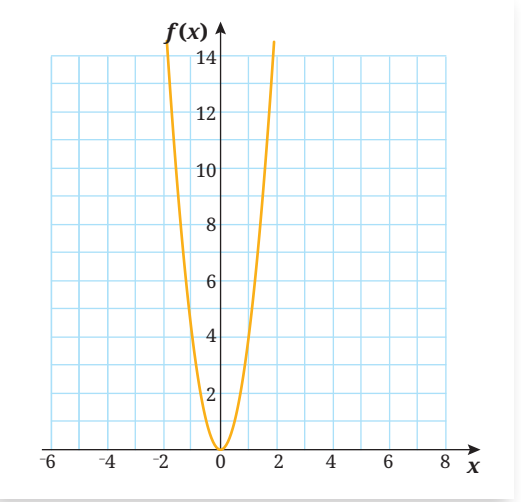
| $x$ | $-20$ | $-10$ | $0$ | $10$ | $20$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-240$ | $-60$ | 0 | $-60$ | $-240$ |

**d** $f(x) = \frac{8}{5}x^2$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\frac{32}{5}$ | $\frac{8}{5}$ | 0 | $\frac{8}{5}$ | $\frac{32}{5}$ |

★★**7.** Effectuez l'analyse complète des fonctions quadratiques ci-dessous.

**a** $f(x) = 4x^2$




**Domaine** $\mathbb{R}$ **Image** $[0, \infty[$

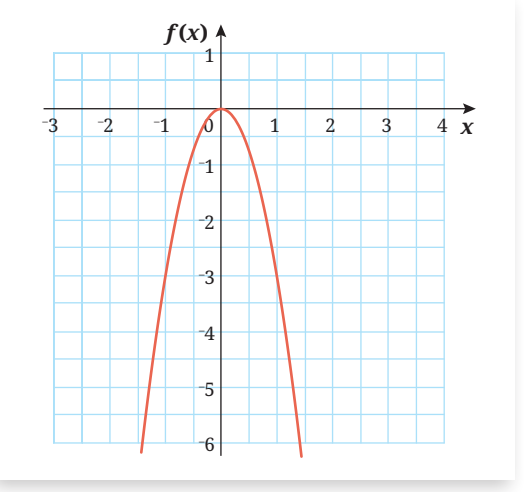
**Variation** Décroissante sur $x \in ]^{-}\infty, 0]$ et croissante sur $x \in [0, \infty[$

**Signe** Positive sur le domaine

**Extremums** Minimum {0} et pas de maximum

**Abscisse(s) à l'origine** {0} **Ordonnée(s) à l'origine** {0}

**b** $f(x) = {}^{-}3x^2$




**Domaine** $\mathbb{R}$ **Image** $]^{-}\infty, 0]$

**Variation** Croissante sur $x \in ]^{-}\infty, 0]$ et décroissante sur $x \in [0, \infty[$

**Signe** Négative sur le domaine

**Extremums** Maximum {0} et pas de mininum

**Abscisse(s) à l'origine** {0} **Ordonnée(s) à l'origine** {0}

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Tracer le graphique d'une fonction quadratique

Il est possible de tracer le graphique d'une fonction quadratique à partir de la règle. Pour y parvenir, il faut suivre les étapes suivantes.

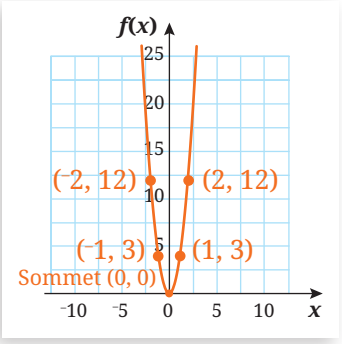
**EXEMPLE**

**Tracer le graphique de la fonction $f(x) = 3x^2$.**

**1.** Construire une table de valeurs en choisissant des valeurs de $x$ positives et négatives pour le même nombre, puis les intégrer à la règle pour trouver les valeurs de $f(x)$ correspondantes.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 12 | 3 | 0 | 3 | 12 |

**2.** Positionner le sommet (0, 0), placer les points déterminés à partir de la table de valeurs et tracer la courbe.




## EXERCICES

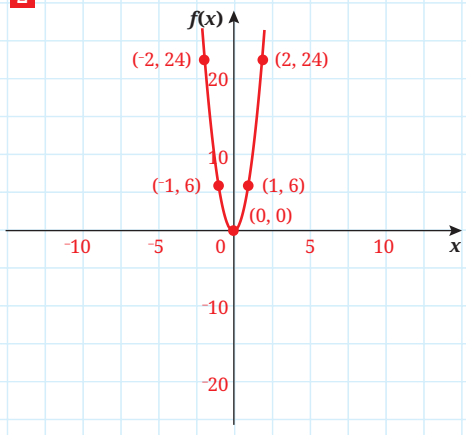
★★ Tracez le graphique des fonctions quadratiques suivantes.

**a** $f(x) = 6x^2$

1.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 24 | 6 | 0 | 6 | 24 |

2.

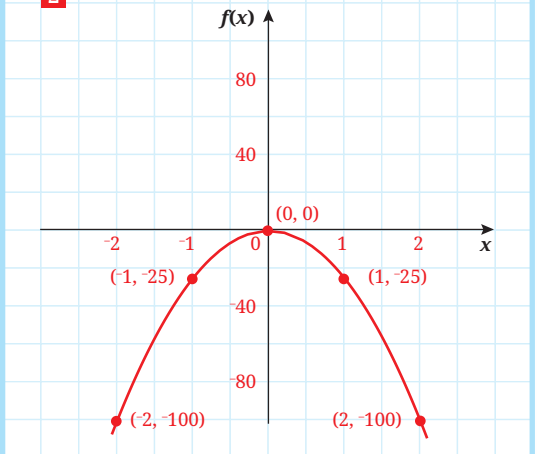



**b** $f(x) = -25x^2$

1.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-100$ | $-25$ | 0 | $-25$ | $-100$ |

2.



## Rechercher la règle d'une fonction quadratique

Lorsqu'on connaît un point autre que le sommet, il est possible de déterminer la règle d'une fonction quadratique.

**EXEMPLE 1**

**Déterminez la règle d'une fonction quadratique passant par le point $(6, -72)$ ?**

| | |
|---|---|
| **1.** Remplacer $x$ et $f(x)$ dans la règle de base par les valeurs du point donné et isoler $a$. | $f(x) = ax^2$<br>$-72 = a(6)^2$<br>$-72 = a(36)$<br>$-2 = a$ |
| **2.** Écrire la règle de la fonction. | $f(x) = -2x^2$<br>La règle de la fonction est $f(x) = -2x^2$. |

**EXEMPLE 2**

**Déterminez la règle d'une fonction quadratique passant par le point $(0{,}8\,;\, 53{,}2)$ ?**

| | |
|---|---|
| **1.** Remplacer $x$ et $f(x)$ dans la règle de base par les valeurs du point donné et isoler $a$. | $f(x) = ax^2$<br>$53{,}2 = a(0{,}8)^2$<br>$53{,}2 = a(0{,}64)$<br>$83{,}1 = a$ |
| **2.** Écrire la règle de la fonction. | $f(x) = 83{,}1x^2$<br>La règle de la fonction est $f(x) = 83{,}1x^2$. |

## EXERCICES

★**1.** Déterminez la règle des fonctions quadratiques suivantes.

**a** Une fonction passant par le point $(5, 75)$

**1** $f(x) = ax^2$
$75 = a(5)^2$
$75 = a(25)$
$3 = a$

**2** $f(x) = 3x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 3x^2$.

**b** Une fonction passant par le point $(10, -10\,000)$

**1** $f(x) = ax^2$
$-10\,000 = a(10)^2$
$-10\,000 = a(100)$
$-100 = a$

**2** $f(x) = -100x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -100x^2$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**2.** Écrivez la règle des fonctions quadratiques représentées par les tables de valeurs suivantes.

**a**

| $x$ | $-4$ | $-2$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 128 | 32 | 0 | 32 | 128 |

Tous les points sauf le sommet (0, 0) peuvent être utilisés.

1 $f(x) = ax^2$
$32 = a(2)^2$
$32 = a(4)$
$8 = a$

2 $f(x) = 8x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 8x^2$.

**b**

| $x$ | $-10$ | $-5$ | 0 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-25\,000$ | $-6250$ | 0 | $-6250$ | $-25\,000$ |

Tous les points sauf le sommet (0, 0) peuvent être utilisés.

1 $f(x) = ax^2$
$-6250 = a(5)^2$
$-6250 = a(25)$
$-250 = a$

2 $f(x) = -250x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -250x^2$.

**c**

| $x$ | $-3$ | 1 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6 | $\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | 6 |

Tous les points sauf le sommet (0, 0) peuvent être utilisés.

1 $f(x) = ax^2$
$6 = a(3)^2$
$6 = a(9)$
$\frac{2}{3} = a$ ou $0,\overline{6}$

2 $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ ou $f(x) = 0,\overline{6}x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = \frac{2}{3}x^2$ ou $f(x) = 0,\overline{6}x^2$.

**d**

| $x$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-50,4$ | $-12,6$ | 0 | $-12,6$ | $-50,4$ |

Tous les points sauf le sommet (0, 0) peuvent être utilisés.

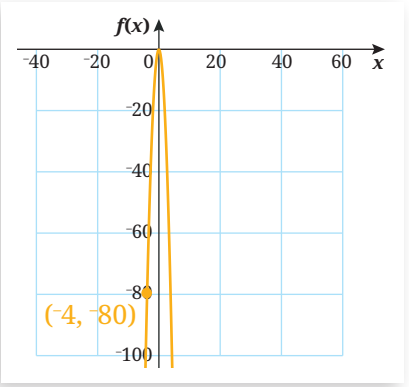
1 $f(x) = ax^2$
$-12,6 = a(1)^2$
$-12,6 = a(1)$
$-12,6 = a$

2 $f(x) = -12,6x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -12,6x^2$.

★★**3.** Écrivez la règle des fonctions quadratiques représentées ci-dessous.

**a**




**1** $f(x) = ax^2$

$-80 = a(-4)^2$

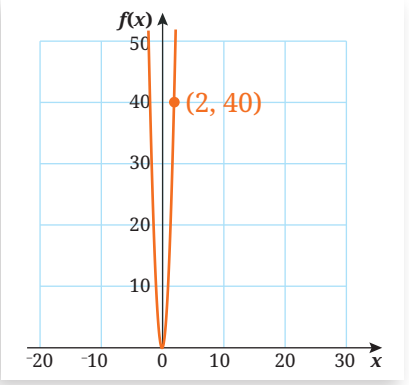
$-80 = a(16)$

$-5 = a$

**2** $f(x) = -5x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = -5x^2$.

**b**




**1** $f(x) = ax^2$

$40 = a(2)^2$

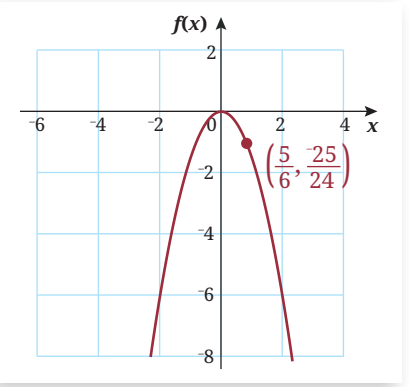
$40 = a(4)$

$10 = a$

**2** $f(x) = 10x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 10x^2$.

**c**




**1** $f(x) = ax^2$

$\frac{-25}{24} = a\left(\frac{5}{6}\right)^2$

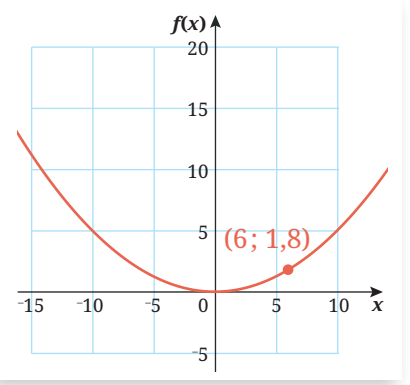
$\frac{-25}{24} = a\left(\frac{25}{36}\right)$

$\frac{-3}{2}$ ou $-1{,}5 = a$

**2** $f(x) = \frac{-3}{2}x^2$ ou $f(x) = -1{,}5x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = \frac{-3}{2}x^2$ ou $f(x) = -1{,}5x^2$.

**d**




**1** $f(x) = ax^2$

$1{,}8 = a(6)^2$

$1{,}8 = a(36)$

$0{,}05 = a$

**2** $f(x) = 0{,}05x^2$

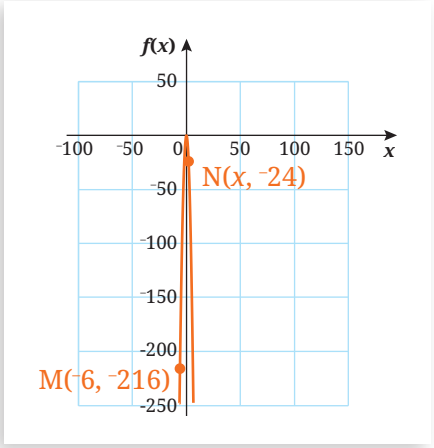
**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 0{,}05x^2$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**4.** Déterminez la coordonnée manquante pour chacune des situations représentées.

**a** Quelle est la coordonnée manquante du point N ?



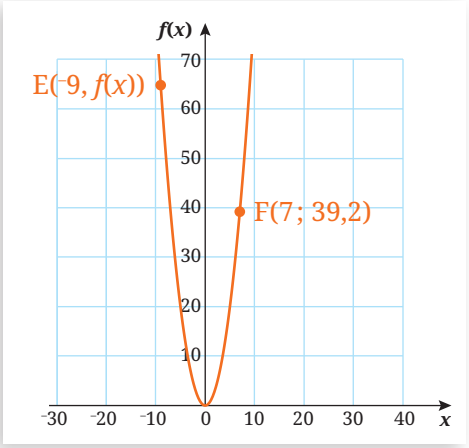

**1** $f(x) = ax^2$
$-216 = a(-6)^2$
$-216 = a \cdot 36$
$-6 = a$
$f(x) = -6x^2$

**2** Si $f(x) = -24$, $x = ?$
$f(x) = -6x^2$
$-24 = -6x^2$
$4 = x^2$
$\pm 2 = x$

**3** La coordonnée manquante du point N est $x = 2$.

**RÉPONSE** La coordonnée manquante du point N est $x = 2$.

**b** Quelle est la coordonnée manquante du point E ?




**1** $f(x) = ax^2$
$39{,}2 = a(7)^2$
$39{,}2 = a(49)$
$0{,}8 = a$
$f(x) = 0{,}8x^2$

**2** Si $x = -9$, $f(x) = ?$
$f(x) = 0{,}8x^2$
$f(x) = 0{,}8(-9)^2$
$f(x) = 0{,}8(81)$
$f(x) = 64{,}8$

**3** La coordonnée manquante du point E est $f(x) = 64{,}8$.

**RÉPONSE** La coordonnée manquante du point E est $f(x) = 64{,}8$.

★★**5.** David veut poser de la tourbe sur son terrain arrière. Étant donné que son terrain est très grand, il aimerait en couvrir de tourbe une seule parcelle en forme de carré. Après avoir contacté une compagnie d'aménagement paysager, voici les prix qu'il a obtenus.

| COÛT DE LA TOURBE SELON LES DIMENSIONS DE LA PARCELLE | | | | |
|---|---|---|---|---|
| MESURE D'UN CÔTÉ DU TERRAIN (m) | 0 | 10 | 15 | 20 |
| COÛT ($) | 0 | 450 | 1012,50 | 1800 |

**a** Déterminez la règle qui traduit cette situation sachant qu'il s'agit d'une fonction quadratique.

$x$ : mesure d'un côté de la parcelle (m)
$f(x)$ : coût ($)

$f(x) = ax^2$
$450 = a(10)^2$
$450 = a(100)$
$4{,}5 = a$
$f(x) = 4{,}5x^2$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 4{,}5x^2$.

**b** Combien coûtera la tourbe si David en pose sur une parcelle de 169 m$^2$ ?

**1** Mesure d'un côté de la parcelle
$x^2 = 169$ m$^2$
$x = \sqrt{169}$
$x = 13$ m

**2** Coût de la tourbe
$f(x) = 4{,}5x^2$
$f(x) = 4{,}5(13)^2$
$f(x) = 4{,}5(169)$
$f(x) = 760{,}50$

**RÉPONSE** La tourbe coûtera 760,50 $.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

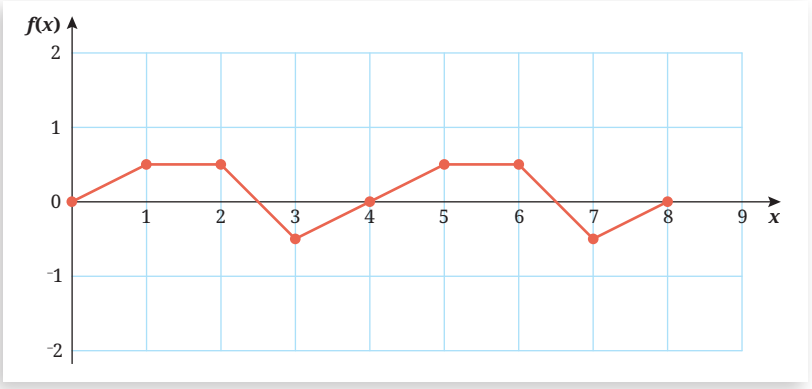
# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 2

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

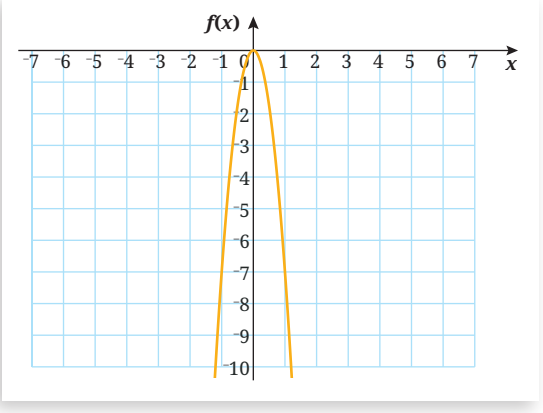
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**1.** Quelle est la période de la fonction suivante ?




**a** 1 **b** 0,5 **c** 4 **d** 8

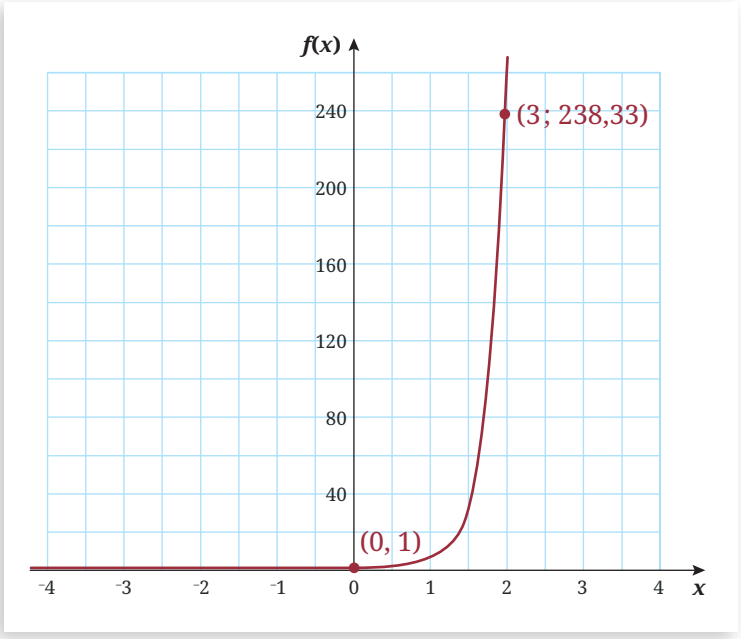
★★**2.** Quelle est la règle de la fonction représentée par le graphique suivant ?




**a** $f(x) = 7x^2$ **b** $f(x) = 7^x$ **c** $f(x) = -7x^2$ **d** $f(x) = 7x$

### CALCULS

★★**3.** Quelle est l'équation de la fonction exponentielle passant par les points suivants ?




**a** $f(x) = 3^x$ **b** $f(x) = 6{,}2x^2$ **c** $f(x) = 6{,}2(3)^x$ **d** $f(x) = 6{,}2^x$

★**4.** Quelle est la valeur de $f(3)$ dans une fonction dont la règle est $f(x) = 8x^2$ ?

**a** 72 **b** 0,61 **c** 576 **d** 24

★★**5.** Quelle est l'équation d'une fonction quadratique passant par le point $(8, -4)$ ?

**a** $f(x) = 0{,}06x^2$ **b** $f(x) = -0{,}06x^2$ **c** $f(x) = -6x^2$ **d** $f(x) = -0{,}06^x$

★★**6.** Quelle est la valeur de $x$ dans une fonction si $50 = 2x^2$ ?

**a** $x = 5$ **b** $x = 2$ **c** $x = 10$ **d** $x = 50$

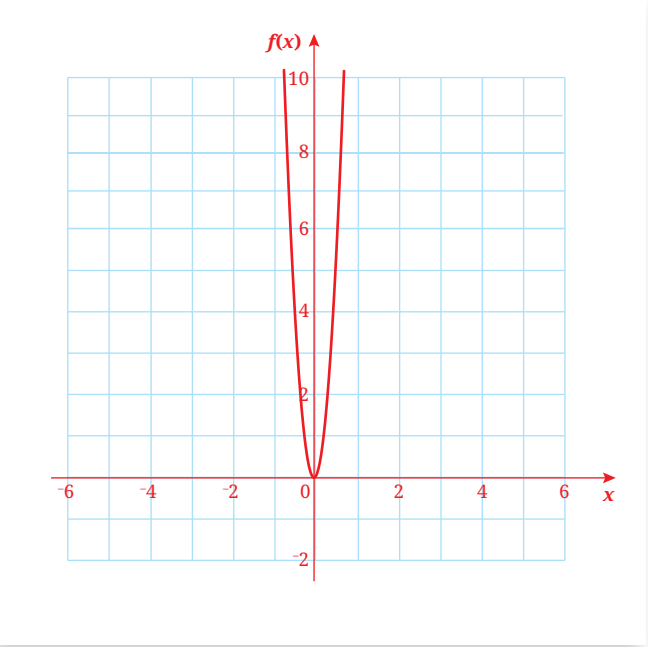
## CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

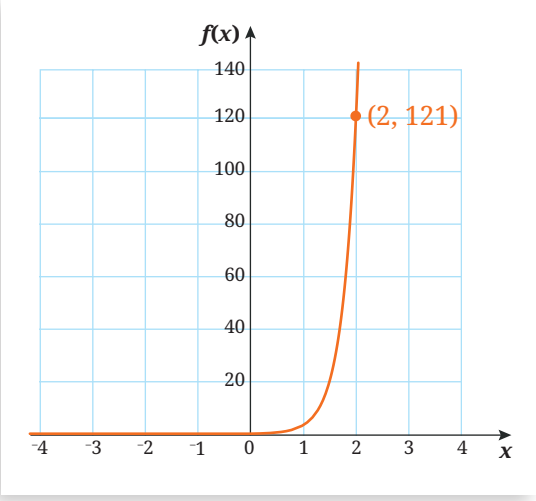
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**7.** Représentez graphiquement la fonction $f(x) = 8x^2$.




★★**8.** Déterminez la règle de la fonction suivante, dont l'ordonnée à l'origine est 1.



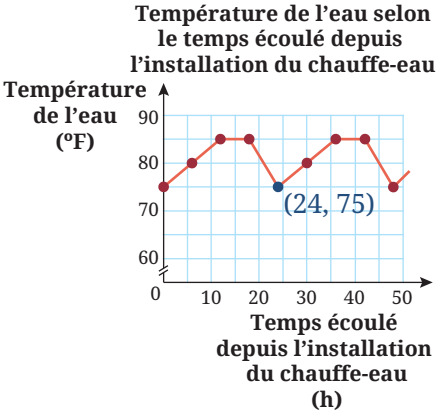

**1** $f(x) = a(c)^x$
$121 = 1(c)^2$
$121 = (c)^2$
$11 = c$

**2** $f(x) = 11^x$

**RÉPONSE** La règle de la fonction est $f(x) = 11^x$.

★★**9.** Une piscine est dotée d'un chauffe-eau qui permet de régulariser la température de l'eau au cours de la journée et de la nuit. Le graphique suivant représente cette situation.

Effectuez l'analyse complète de la fonction.




**Période** 24 heures

**Domaine** $[0, \infty[$

**Image** $[75, 85]$

**Variation** Croissante pour $x \in [0, 12] \cup [24, 36]$…, constante pour $x \in [12, 18] \cup [36, 42]$… et décroissante pour $x \in [18, 24] \cup [42, 48]$…

**Signe** Positive sur le domaine

**Extremums** Minimum {0, 24, 48, …} et maximum $x \in [12, 18] \cup [36, 42]$…

**Abscisse(s) à l'origine** Aucune

**Ordonnée(s) à l'origine** {75}

★★**10.** L'*Helicobacter pylori* est une bactérie pathogène qui est souvent à l'origine des ulcères d'estomac. Pour en faire l'étude, on la cultive dans une substance nutritive gélatineuse afin de favoriser sa prolifération. Après avoir isolé huit bactéries dans un contenant, on remarque que le nombre de bactéries quadruple chaque heure.

Déterminez le nombre de bactéries qu'il y a aura dans le contenant après cinq heures.

**1** $x$ : nombre d'heures écoulées depuis le début de l'expérience
$f(x)$ : nombre de bactéries dans le contenant

**2** Au départ, il y a huit bactéries dans la gelée, alors $a = 8$.
Le nombre de bactéries quadruple chaque heure : $100\,\% \cdot 4 = 400\,\%$, alors $c = 4$.

**3** $f(x) = a(c)^x$
$f(x) = 8(4)^x$

**4** $f(5) = ?$
$f(x) = 8(4)^x$
$f(5) = 8(4)^5$
$f(5) = 8(1024)$
$f(5) = 8192$

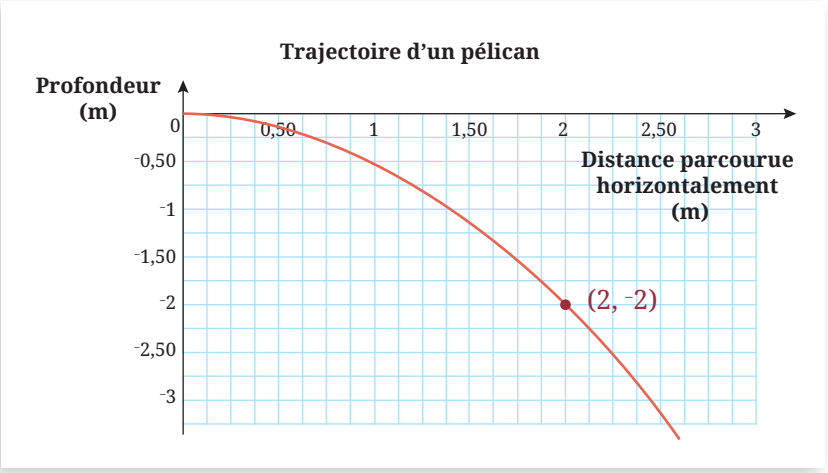
**RÉPONSE** Après 5 heures, il y aura 8192 bactéries dans le contenant.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★ **11.** Le pélican est un oiseau qui se caractérise par un grand bec muni d'une poche extensible pouvant contenir une grande quantité de nourriture. Il se nourrit presque exclusivement de petits poissons. Pour ce faire, il plonge tête première dans l'eau et engloutit les espèces aquatiques qu'il parvient à capturer. La situation peut être modélisée par le graphique suivant, qui représente le mouvement du pélican dès son entrée dans l'eau.




S'il réussit à attraper deux poissons qui se trouvent horizontalement à 3 m et à 4,2 m de lui lors de son entrée dans l'eau, à quelle profondeur respective se trouvent les deux poissons ?

**1** Règle de la fonction quadratique

$f(x) = ax^2$

$-2 = a(2)^2$

$-2 = a(4)$

$-0{,}5 = a$

$f(x) = -0{,}5x^2$

**2** Profondeur du premier poisson

$f(3) = ?$

$f(x) = -0{,}5x^2$

$f(3) = -0{,}5(3)^2$

$f(3) = -0{,}5(9)$

$f(3) = -4{,}5$

**3** Profondeur du deuxième poisson

$f(4{,}2) = ?$

$f(x) = -0{,}5x^2$

$f(4{,}2) = -0{,}5(4{,}2)^2$

$f(4{,}2) = -0{,}5(17{,}64)$

$f(4{,}2) = -8{,}82$

**RÉPONSE** Le premier poisson se trouve à une profondeur de 4,5 m et le deuxième poisson à une profondeur de 8,82 m.

**12.** Carl et Johanne sont à la retraite et veulent s'acheter une petite roulotte pour faire du camping. Ils hésitent entre deux modèles, car ils aimeraient avoir la plus grande valeur de revente possible dans trois ans, lorsqu'ils opteront pour le modèle de l'année. Voici des informations qu'un vendeur leur a données.

**Modèle 1**

Coût initial : 16 000 $

Perte de valeur par année : 25 %

**Modèle 2**

Coût initial : 19 500 $

Perte de valeur par année : 20 %

Déterminez le modèle que devraient choisir Carl et Johanne, puis calculez la différence de valeur qu'il y aura entre les deux modèles au moment de leur revente dans trois ans.

**1** Règle du modèle 1

$x$ : nombre d'années écoulées depuis l'achat

$f(x)$ : valeur de revente ($)

Le coût d'achat est de 16 000 $, alors $a = 16\,000$.

La perte de valeur par année est de 25 % :

100 % – 25 % = 75 %,

alors $c = 0{,}75$.

$f(x) = a(c)^x$

$f(x) = 16\,000(0{,}75)^x$

**2** Règle du modèle 2

$x$ : nombre d'années écoulées depuis l'achat

$f(x)$ : valeur de revente ($)

Le coût d'achat est de 19 500 $, alors $a = 19\,500$.

La perte de valeur par année est de 20 % :

100 % – 20 % = 80 %,

alors $c = 0{,}80$.

$f(x) = a(c)^x$

$f(x) = 19\,500(0{,}80)^x$

**3** Valeur de revente du modèle 1 dans trois ans

$f(3) = ?$

$f(x) = 16\,000(0{,}75)^x$

$f(3) = 16\,000(0{,}75)^3$

$f(3) = 16\,000(0{,}42)$

$f(3) = 6720$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**4** Valeur de revente du modèle 2 dans trois ans

$f(3) = ?$
$f(x) = 19\,500(0{,}80)^x$
$f(3) = 19\,500(0{,}8)^3$
$f(3) = 19\,500(0{,}51)$
$f(3) = 9945$

**5** Différence entre la valeur de revente des deux modèles dans trois ans

$9945 - 6720 = 3225$

**RÉPONSE**

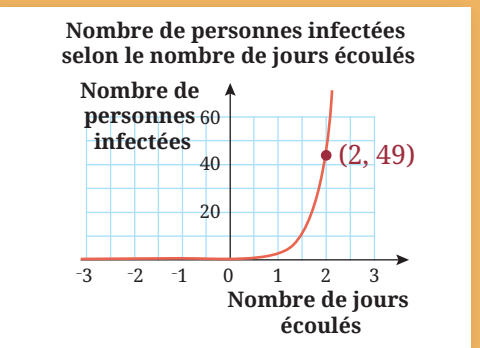
Carl et Johanne devraient choisir le modèle 2, car sa valeur de revente sera supérieure à celle du modèle 1 dans 3 ans (9945 $ pour le modèle **2** et 6720 $ pour le modèle **1**. La différence entre la valeur de revente des deux modèles dans 3 ans sera de 3225 $.

★★ **13.** Un centre spécialisé s'est penché sur l'étude de la propagation d'un virus qui a infecté la population d'un pays à des périodes différentes. Voici les informations qu'il a compilées.

**Virus en 2010**

| Nombre de jours écoulés | Nombre de personnes infectées |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 5 |
| 2 | 25 |
| 3 | 125 |

**Virus en 2014**




**Virus en 2018**

- Au départ, il y avait déjà 6 personnes infectées.
- Au 4e jour, il y avait 96 personnes infectées.

Si la propagation du virus suit le modèle d'une fonction exponentielle, combien de personnes au total ont été infectées dans les huit premiers jours suivant le début de l'épidémie ?

**1** Règle du virus en 2010

$x$ : nombre de jours écoulés depuis le début de l'épidémie

$f(x)$ : nombre de personnes infectées

Au départ, une seule personne est infectée, donc $a = 1$.

$f(x) = a(c)^x$

$f(x) = 1(c)^x$

$5 = 1(c)^1$

$5 = c$

$f(x) = 5^x$

**2** Règle du virus en 2014

$x$ : nombre de jours écoulés depuis le début de l'épidémie

$f(x)$ : nombre de personnes infectées

Au départ, une seule personne est infectée, donc $a = 1$.

$f(x) = a(c)^x$

$f(x) = 1(c)^x$

$49 = 1(c)^2$

$49 = c^2$

$7 = c$

$f(x) = 7^x$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



**3** Règle du virus en 2018
$x$ : nombre de jours écoulés depuis le début de l'épidémie
$f(x)$ : nombre de personnes infectées

Au départ, six personnes sont infectées, donc $a = 6$.
$f(x) = 6(c)^x$
$96 = 6(c)^4$
$16 = c^4$
$2 = c$
$f(x) = 6(2)^x$

**4** Nombre de personnes infectées par le virus en 2010 après huit jours
$f(8) = ?$
$f(x) = 5^x$
$f(8) = 5^8$
$f(8) = 390\ 625$

**5** Nombre de personnes infectées par le virus en 2014 après huit jours
$f(8) = ?$
$f(x) = 7^x$
$f(8) = 7^8$
$f(8) = 5\ 764\ 801$

**6** Nombre de personnes infectées par le virus en 2018 après huit jours
$f(8) = ?$
$f(x) = 6(2)^x$
$f(8) = 6(2)^8$
$f(8) = 6(256)$
$f(8) = 1536$

**7** Nombre total de personnes infectées après huit jours
$390\ 625 + 5\ 764\ 801 + 1536 = 6\ 156\ 962$

**RÉPONSE** Au total, 6 156 962 personnes ont été infectées par le virus après 8 jours au cours des 3 périodes.

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## L'héritage de Julianne

Le jour de ses 20 ans, Julianne reçoit une lettre d'un notaire qui lui annonce qu'une vieille tante de son père lui lègue 20 000 $, qu'elle pourra toucher lorsqu'elle aura 25 ans. Ses parents lui conseillent donc de placer cette somme pour une durée de 5 ans. Après s'être informée auprès d'une banque, elle apprend que deux options s'offrent à elle.

**Option 1**

L'intérêt pour la première année est de 2 % et passe à 3 % pour la deuxième année, à 4 % pour la troisième année, à 5 % pour la quatrième année et à 6 % pour la cinquième année.

**Option 2**

L'intérêt est fixé à 4 % par année.

Quelle option est la plus avantageuse si Julianne souhaite faire fructifier la somme qu'elle a reçue en héritage ?

**1** Identification des variables

$x$ : nombre d'années écoulées depuis le placement

$f(x)$ : valeur du placement ($)

**2** Valeur du placement après un an avec l'option 1

$f(x) = 20\,000(1{,}02)^x$

$f(1) = 20\,000(1{,}02)^1$

$f(1) = 20\,400$

**3** Valeur du placement après deux ans avec l'option 1

$f(x) = 20\,400(1{,}03)^x$

$f(1) = 20\,400(1{,}03)^1$

$f(1) = 21\,012$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



**4** Valeur du placement après trois ans avec l'option 1

$f(x) = 21\,012(1{,}04)^x$
$f(1) = 21\,012(1{,}04)^1$
$f(1) = 21\,852{,}48$

**5** Valeur du placement après quatre ans avec l'option 1

$f(x) = 21\,852{,}48(1{,}05)^x$
$f(1) = 21\,852{,}48(1{,}05)^1$
$f(1) = 22\,945{,}10$

**6** Valeur du placement après cinq ans avec l'option 1

$f(x) = 22\,945{,}10(1{,}06)^x$
$f(1) = 22\,945{,}10(1{,}06)^1$
$f(1) = 24\,321{,}81$

**7** Règle de l'option 2

$f(x) = 20\,000(1{,}04)^x$

**8** Valeur du placement après cinq ans avec l'option 2

$f(x) = 20\,000(1{,}04)^x$
$f(5) = 20\,000(1{,}04)^5$
$f(5) = 20\,000(1{,}22)$
$f(5) = 24\,400$

**RÉPONSE**

L'option 2 est la plus avantageuse pour Julianne après 5 ans. Le placement vaudra alors 24 400 $, ce qui est supérieur à 24 321,81 $, la valeur qu'elle obtiendrait avec l'option 1.

# SITUATION-PROBLÈME

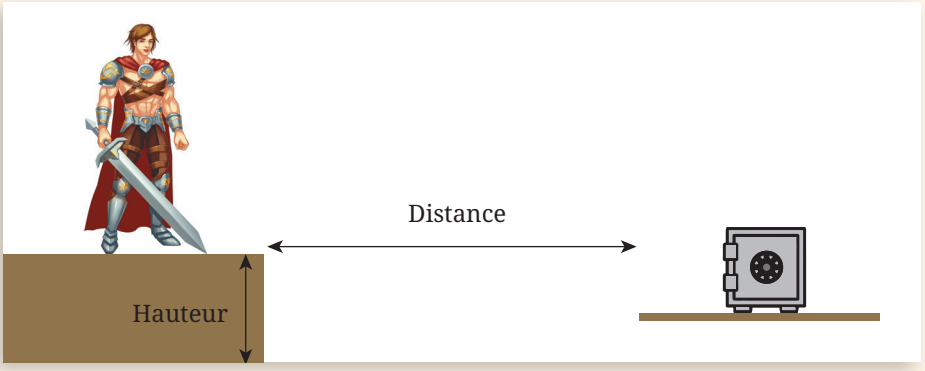
CD1

## La quête du guerrier

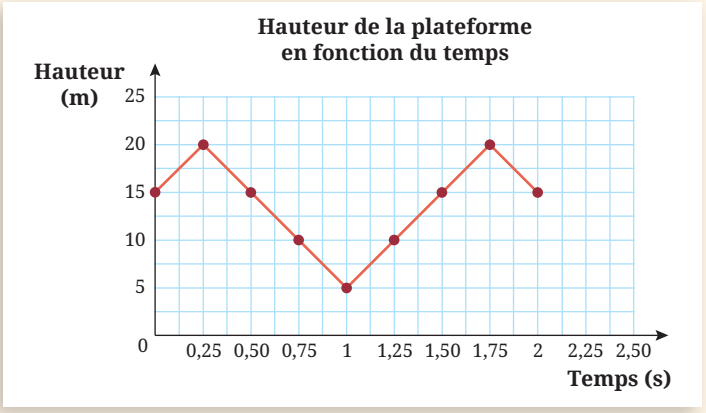
Les spécialistes qui programment les jeux vidéo ont recours à diverses fonctions mathématiques lors de la conception de ceux-ci. Ce sont ces fonctions qui permettent, entre autres, de déterminer la force d'un guerrier selon ses attributs et la vitesse de ses déplacements.

Jacob joue à son jeu vidéo préféré, dans lequel il incarne un guerrier qui doit sauver le royaume. Lors de sa quête, il doit courir et se laisser tomber dans un trou où une plateforme élévatrice monte et descend sans arrêt. Sur cette plateforme, il y a un coffre renfermant l'épée Xcalibur qui permettra à Jacob de vaincre celui qui a détrôné le roi.

La représentation de la situation est illustrée ci-dessous.




La hauteur de la plateforme varie selon le temps, comme illustré dans le graphique ci-dessous.




Une fonction quadratique permet de calculer la distance que le guerrier parcourt selon le temps de sa chute. Par exemple, en faisant une chute de 2 secondes, il franchit une distance horizontale de 0,8 m.

On peut déterminer le nombre de points de vie que le guerrier perd en fonction de la hauteur de sa chute à l'aide d'une fonction exponentielle. Par exemple, si le personnage perd 2048 points de vie, c'est qu'il a fait une chute de 11 m. Cette fonction est mise en application dès que le guerrier commence à tomber.

Avant sa chute, le guerrier de Jacob avait 36 000 points de vie. Déterminez le nombre de points de vie qu'il lui reste s'il parcourt une distance de 2,45 m lors de sa chute.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



**1** Règle de la fonction quadratique

(2 ; 0,8)

$f(x) = ax^2$

$0{,}8 = a(2)^2$

$0{,}8 = a(4)$

$0{,}2 = a$

$f(x) = 0{,}2x^2$

**2** Temps de chute du guerrier

$f(x) = 0{,}2x^2$

$2{,}45 = 0{,}2x^2$

$12{,}25 = x^2$

$3{,}5 = x$

3,5 secondes

**3** Hauteur de la plateforme

Période de la fonction périodique : 1,5 seconde

3,5 – 1,5 = 2 secondes

Donc la hauteur est la même que celle à 2 secondes, soit 15 m.

**4** Règle de la fonction exponentielle

(11, 2048)

$f(x) = c^x$

$2048 = c^{11}$

$2 = c$

$f(x) = 2^x$

**5** Nombre de points de vie perdus par le guerrier lors de la chute

$f(x) = 2^x$

$f(x) = 2^{15}$

$f(x) = 32\ 768$

**6** Nombre de points de vie qu'il reste au guerrier

36 000 – 32 768 = 3232

**RÉPONSE** Il reste 3232 points de vie au guerrier de Jacob.

# FEUILLE DE NOTES

## Fonction périodique

### Reconnaître une fonction périodique

1. Écrire les coordonnées de deux points correspondants dans deux motifs qui se suivent.
2. Calculer la période entre deux points correspondants de l'axe des $x$ dans deux cycles qui se suivent.

### Résoudre une situation à l'aide du graphique

1. Repérer le cycle et déterminer la période.
2. Soustraire la période de la valeur de $x$ donnée (ou les additionner, selon le cas) jusqu'à obtenir une valeur de $x$ qui se trouve dans le plan cartésien.
3. À partir du graphique, trouver la coordonnée manquante du point recherché.
4. Rapporter la coordonnée trouvée à la valeur de $x$ donnée.

## Fonction exponentielle
## $f(x) = a(c)^x$

### Tracer une fonction exponentielle

1. Construire une table de valeurs à partir de la règle, dans laquelle on remplace différentes valeurs de $x$.
2. Placer directement les points dans un plan cartésien et les relier à l'aide d'une courbe.

### Rechercher la règle

1. Trouver la valeur de $c$ en utilisant la valeur de $a$ et les coordonnées de l'autre point donné.
2. Écrire la règle de la fonction.

### Résoudre des problèmes

1. Identifier les variables.
2. Trouver la règle en déterminant les valeurs de $a$ et de $c$.
   $a$ : valeur initiale
   $c$ : base (par rapport au 100 %)
3. Écrire la règle de la fonction.
4. Résoudre le problème.

## Fonction quadratique (polynomiale du second degré)
## $f(x) = ax^2$

### Caractéristiques

- Le sommet de la parabole est centré à l'origine (0, 0).
- Un axe de symétrie se trouve au centre de la fonction et a comme équation $x = 0$.
- Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut et si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas.
- La valeur de $a$ influence l'allure de la courbe.

### Tracer le graphique

1. Construire une table de valeurs en choisissant des valeurs de $x$ positives et négatives pour le même nombre, puis les intégrer à la règle pour trouver les valeurs de $f(x)$ correspondantes.
2. Positionner le sommet (0, 0), placer les points déterminés dans la table de valeurs et tracer la courbe.

### Rechercher la règle

1. Remplacer $x$ et $f(x)$ dans la règle de base par les valeurs du point donné et isoler $a$.
2. Écrire la règle de la fonction.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# CONSOLIDATION DE L'ÉTAPE 1

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

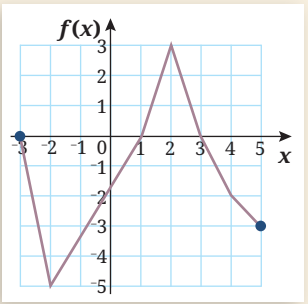
★1. Parmi les graphiques ci-dessous, lequel représente une fonction ayant les caractéristiques suivantes ?

**Elle est croissante sur l'intervalle [⁻2, 2].**

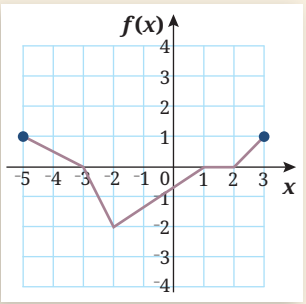
**Elle est négative sur l'intervalle [⁻3, 1].**

**Son domaine est [⁻5, 3].**

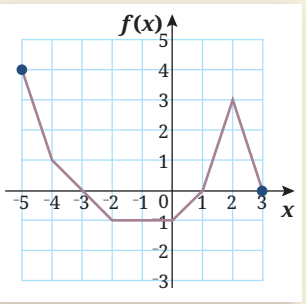
**a**




**b**




**c**




★2. Si une droite passe par les points A(⁻12, 57), B(24, ⁻69) et C($x$, 60,5), quelle est la valeur de $x$ ?

**a** ⁻43 **b** ⁻13 **c** 13 **d** 43

★★3. Quelle est la règle d'une fonction quadratique passant par le point (⁻5 ; ⁻7,5) ?

**a** $f(x) = ⁻1{,}5x^2$ **b** $f(x) = ⁻0{,}3x^2$ **c** $f(x) = 0{,}3x^2$ **d** $f(x) = 1{,}5x^2$

### CALCULS

★★**4.** Selon la fonction décrite ci-dessous, quelle est la valeur de $x$ si $f(x) = 33$.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 7, \text{ pour } x \in [0, 9] \\ 2x + 11, \text{ pour } x \in [9, 18] \\ x + 29, \text{ pour } x \in [18, 27] \end{cases}$$

**a** 4 **b** 10 **c** 11 **d** 22

★★**5.** Quelle table de valeurs correspond au graphique ci-dessous ?

**a**

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 5 | 6 | 4 | 4 |

**b**

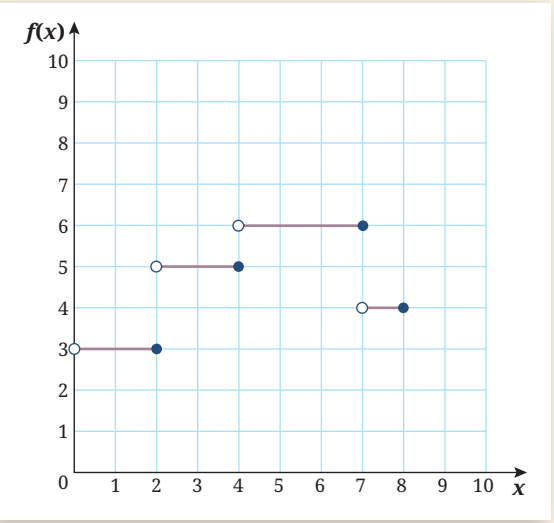
| $x$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 4 |

**c**

| $x$ | 0 | 2 | 4 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 3 | 5 | 6 | 4 |

**d**

| $x$ | 1 | 4 | 5 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 5 | 6 | 6 | 4 |




★★**6.** Parmi les tables de valeurs ci-dessous, laquelle représente une fonction exponentielle ?

**a**

| $x$ | 0 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-3$ | $^-12$ | $^-96$ | $^-768$ |

**b**

| $x$ | 0 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,25 | 20 | 125 | 320 |

**c**

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | 8 | 17 | 26 |

**d**

| $x$ | 1 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $^-400$ | $^-200$ | $^-80$ | $^-50$ |

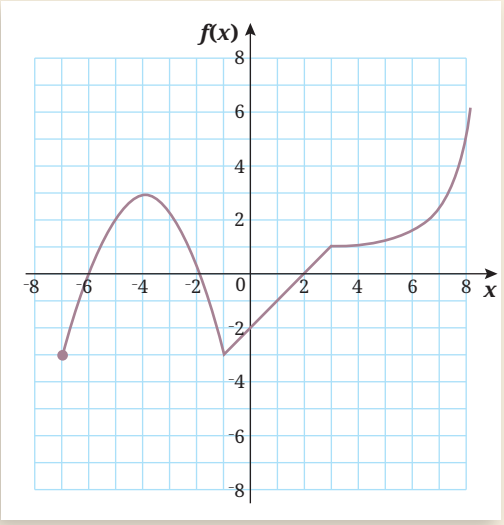
**CALCULS**

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**7.** Faites l'analyse complète de la fonction illustrée ci-dessous.




**Domaine** $[-7, \infty[$

**Image** $[-3, \infty[$

**Ordonnée à l'origine** $-2$

**Zéro(s)** $-6$, $-2$ et $2$

***f* croissante (↗)** $[-7, -4] \cup [-1, \infty[$

***f* décroissante (↘)** $[-4, -1]$

***f* constante** Aucune

***f* positive (+)** $[-6, -2] \cup [2, \infty[$

***f* négative (–)** $[-7, -6] \cup [-2, 2]$

**Maximum** Aucun

**Minimum** $-3$

★★**8.** Louis investit 20 000 $ dans un placement qui croît de façon exponentielle. Après trois ans, son placement atteindra une valeur de 23 152,50 $. Combien vaudra-t-il après huit ans ?

**1** Règle de la fonction exponentielle

$f(x) = a(c)^x$

$f(x) = 20\,000(c)^x$

$23\,152{,}50 = 20\,000(c)^3$

$1{,}157\,625 = (c)^3$

$1{,}05 = c$

$f(x) = 20\,000(1{,}05)^x$

**2** Valeur du placement après 8 ans

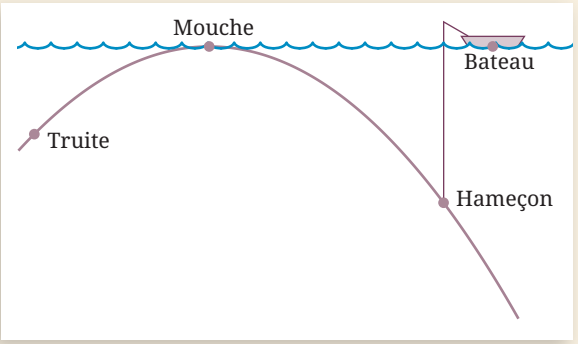
$f(x) = 20\,000(1{,}05)^8$

$f(x) = 29\,549{,}11$

**RÉPONSE** Le placement de Louis vaudra 29 549,11 $ après 8 ans.

★★**9.** Le graphique ci-contre illustre la trajectoire parabolique d'une truite qui se promène dans un lac.

La truite se trouve à une profondeur de 2,5 m lorsqu'elle aperçoit la mouche, qui est à une distance horizontale de 5 m d'elle. À quelle distance horizontale de la mouche se trouve le bateau si la truite se fait prendre par l'hameçon à 6,4 m de profondeur ?




**1** Règle de la parabole

$f(x) = ax^2$

$^-2{,}5 = a \cdot 5^2$

$^-2{,}5 = a \cdot 25$

$^-0{,}1 = a$

$f(x) = {}^-0{,}1x^2$

**2** Distance du bateau

$f(x) = {}^-0{,}1x^2$

$^-6{,}4 = {}^-0{,}1x^2$

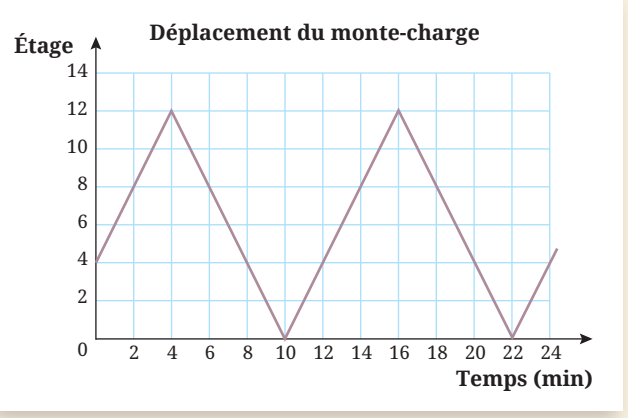
$64 = x^2$

$8 = x$

**RÉPONSE** Le bateau se trouve à une distance horizontale de 8 m de la mouche.

★★**10.** Le graphique ci-dessous illustre les déplacements d'un monte-charge mécanique qui est constamment en mouvement.

Des employés se trouvant au huitième étage doivent mettre des paquets de bardeaux sur le monte-charge pour les acheminer au douzième étage. Ils ont le temps de mettre 8 paquets de bardeaux à la fois sur le monte-charge. Combien de temps prendront-ils pour monter 135 paquets de bardeaux au douzième étage ?




**1** Nombre de chargements nécessaires

$135 \div 8 = 16{,}875$

Donc 17 voyages

**2** Période de la fonction périodique

12 minutes

**3** Temps pour 17 chargements

$17 \cdot 12 = 204$ minutes

**4** Temps total

204 + 2 (temps au départ) + 2 (temps pour le dernier chargement) = 208 minutes

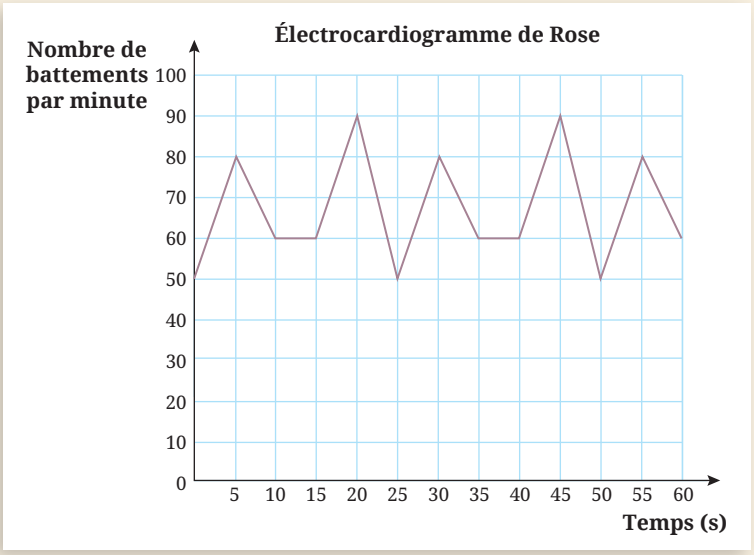
**RÉPONSE** Les employés prendront 208 minutes pour monter les 135 paquets de bardeaux au douzième étage.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne Reproduction autorisée

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★ **11.** Rose, un bébé naissant, est gardée en observation à la pouponnière. Un électrocardiogramme surveille son rythme cardiaque, qui est régulier. Le graphique ci-dessous illustre la lecture faite par l'électrocardiogramme lors de la première minute de sommeil de Rose.




Après 3 min 18 s, Rose se fait réveiller. Quelle était la dernière lecture de l'électrocardiogramme ?

**1** Période de la fonction périodique
25 secondes

**2** Déterminer le temps du branchement (s)
$3 \cdot 60 + 18 = 198$ secondes

**3** Point de correspondance sur la fonction périodique
$198 \div 25 = 7{,}92$
$0{,}92 \cdot 25 = 23$ secondes

**4** Équation de la droite passant par les points (20, 90) et (25, 50)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{50 - 90}{25 - 20}$$

$$a = \frac{-40}{5}$$

$$a = -8$$

$$f(x) = -8x + b$$

$$50 = -8(25) + b$$

$$50 = -200 + b$$

$$250 = b$$

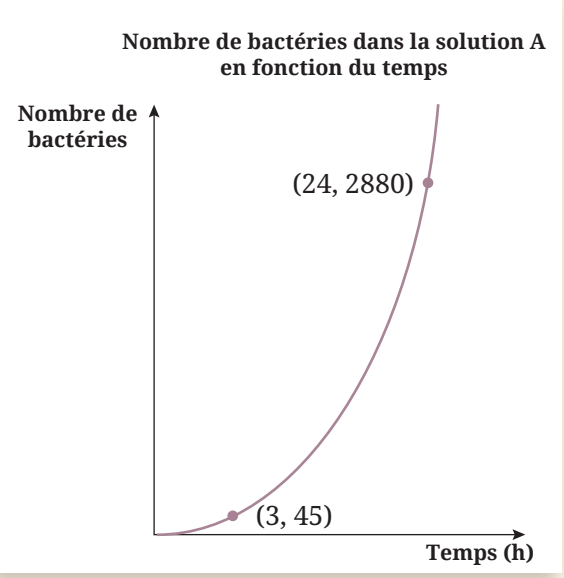
$$f(x) = -8x + 250$$

**5** Déterminer le nombre de battements par minute à 23 secondes
$f(x) = -8(23) + 250$
$f(x) = 66$ battements par minute

**RÉPONSE** La dernière lecture de l'électrocardiogramme indiquait 66 battements par minute.

★★ **12.** Un important laboratoire pharmaceutique tente d'accélérer le rythme de croissance du nombre de bactéries utilisées dans l'un de ses produits.

Présentement, les bactéries sont créées à l'intérieur d'une solution liquide **A**. Leur croissance est illustrée dans le graphique ci-contre.




Deux scientifiques du laboratoire travaillent sur une nouvelle solution liquide **B** dans laquelle ils ont introduit deux bactéries. Ils notent que le nombre de bactéries double toutes les heures.

Toutes les heures, les scientifiques calculent le nombre de bactéries présentes dans les deux solutions.

Après combien d'heures la solution **B** contiendra-t-elle plus de bactéries que la solution **A** ?

**1** Règle pour la solution A

$f(x) = ax^2$

$45 = a \cdot 3^2$

$45 = 9a$

$5 = a$

$f(x) = 5x^2$

**2** Évolution du nombre de bactéries dans la solution A

$f(x) = 5x^2$

$f(x) = 5 \cdot 24^2$

$f(x) = 2880$

Donc le nombre de bactéries dans la solution A évolue selon une fonction quadratique.

**3** Règle pour la solution B

Il s'agit d'une fonction exponentielle.

$g(x) = a(c)^x$

$g(x) = 2(2)^x$

**4** Comparaison du nombre de bactéries dans chaque solution toutes les heures

SOLUTION A

| **Temps (h)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de bactéries** | 0 | 5 | 20 | 45 | 80 | 125 | 180 | 245 | 320 |

SOLUTION B

| **Temps (h)** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre de bactéries** | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 516 |

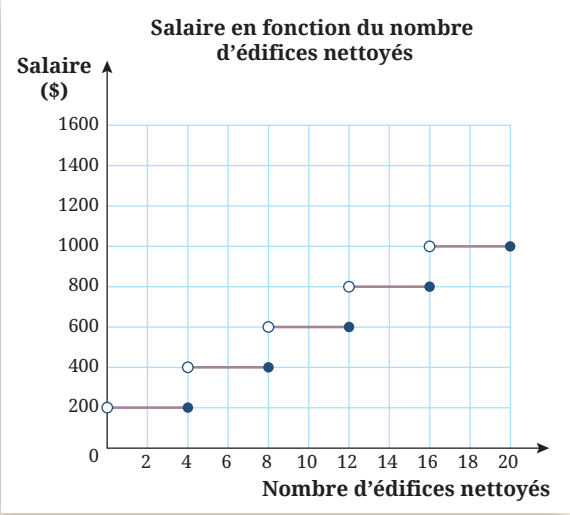
**RÉPONSE** Il y aura plus de bactéries dans la solution B à partir de la septième heure.

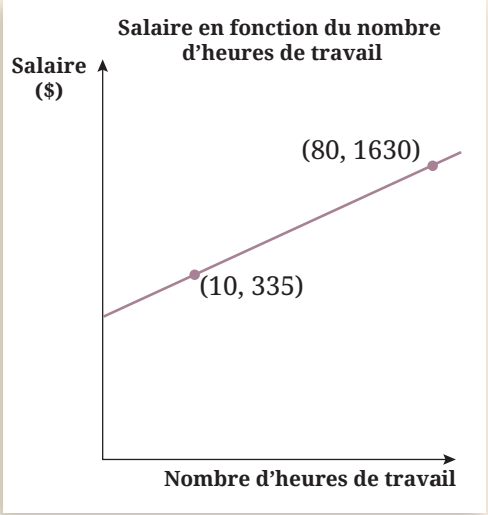
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **13.** Myriam travaille pour une compagnie qui fait l'entretien ménager d'édifices. Son salaire est calculé en fonction du nombre d'édifices nettoyés et du nombre d'heures de travail qu'elle effectue. À ce salaire s'ajoute une somme couvrant ses déplacements. Myriam reçoit une paye toutes les deux semaines.

Voici deux graphiques qui permettent de calculer ses revenus.




Si elle a touché un salaire de 2152,50 $ pour 65 heures de travail, combien d'édifices Myriam a-t-elle nettoyés ?

**1** Règle pour le salaire en fonction du nombre d'heures
(10, 335) (80, 1630)

$$a = \frac{1630 - 335}{80 - 10}$$

$$a = \frac{1295}{70}$$

$$a = 18{,}5$$

$f(x) = 18{,}5x + b$
$1630 = 18{,}5 \cdot 80 + b$
$1630 = 1480 + b$
$150 = b$
$f(x) = 18{,}5x + 150$

**2** Salaire pour 65 heures de travail
$f(x) = 18{,}5 \cdot 65 + 150$
$f(x) = 1352{,}50$

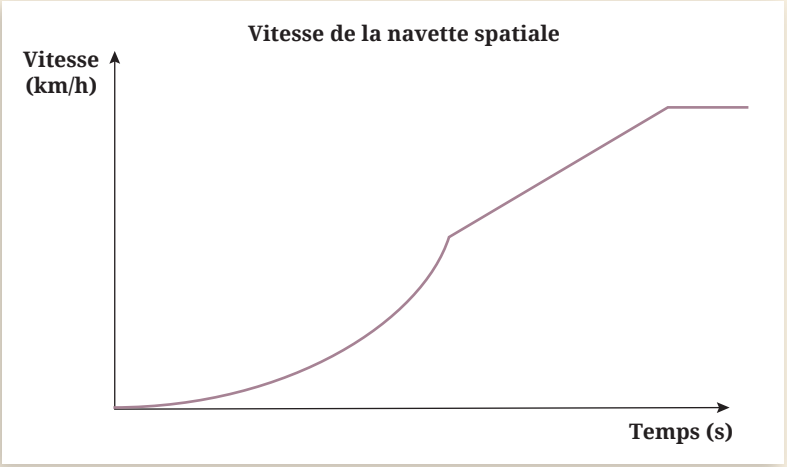
**3** Salaire en fonction du nombre d'édifices nettoyés
$2152{,}50 - 1352{,}50 = 800$

**4** Nombre d'édifices nettoyés
13, 14, 15 ou 16 édifices

**RÉPONSE** Myriam a nettoyé 13, 14, 15 ou 16 édifices.

**14.** Lors de son décollage, une navette spatiale accélère rapidement. Après 90 secondes seulement, elle atteint déjà une vitesse de 4050 km/h. Lorsque la navette atteint une vitesse de 16 200 km/h, sa vitesse s'accroît de manière constante, puis trente secondes plus tard, elle atteint 19 032 km/h. Une fois qu'elle est en orbite dans l'espace, la navette conserve toujours la même vitesse, soit 28 000 km/h.

Le graphique ci-dessous illustre la vitesse de la navette en fonction du temps.




Après combien de temps cette navette spatiale atteint-elle l'espace ?

**1** Règle de la fonction quadratique

$f(x) = ax^2$ (90, 4050)

$4050 = a \cdot 90^2$

$4050 = a \cdot 8100$

$0{,}5 = a$

$f(x) = 0{,}5x^2$

**2** Temps pour que la vitesse atteigne 16 200 km/h

$16\,200 = 0{,}5x^2$

$32\,400 = x^2$

$180 = x$

Donc 180 secondes

**3** Temps pour que la vitesse atteigne 19 032 km/h

$180 + 30 = 210$ secondes

**4** Règle de la fonction linéaire

(180, 16 200) (210, 19 032)

$$a = \frac{19\,032 - 16\,200}{210 - 180}$$

$$a = \frac{2832}{30}$$

$a = 94{,}4$

$f(x) = 94{,}4x + b$

$16\,200 = 94{,}4 \cdot 180 + b$

$16\,200 = 16\,992 + b$

$-792 = b$

$f(x) = 94{,}4x - 792$

**5** Temps pour que la vitesse atteigne 28 000 km/h

$28\,000 = 94{,}4x - 792$

$28\,792 = 94{,}4x$

$305 = x$

**RÉPONSE** La navette atteint la vitesse de 28 000 km/h après 305 secondes.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

3

# LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée


| | |
|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | 120 |
| **3.1** L'équation d'une droite | 122 |
| **3.2** La position relative de deux droites | 129 |
| **3.3** La distance entre deux points | 134 |
| **3.4** Le point milieu | 140 |
| **3.5** Le point de partage | 146 |
| **Consolidation du chapitre 3** | 157 |
| **Situation d'application – Un rallye dans le désert** | 166 |
| **Situation-problème – Deux nouveaux quartiers résidentiels** | 168 |
| **Feuille de notes** | 172 |

## À QUOI ÇA SERT ?

Dans plusieurs contextes, que ce soit en géographie ou en aménagement et urbanisme, savoir situer des points dans des plans cartésiens s'avère très utile, de même que calculer la distance entre ces points et les différents points de partage pour placer divers éléments à des endroits stratégiques.

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

★1. Indiquez le taux de variation et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes.

**a** $f(x) = 3x + 8$ $a = 3$ $b = 8$

**b** $f(x) = -2x + 1$ $a = -2$ $b = 1$

**c** $f(x) = x$ $a = 1$ $b = 0$

**d** $f(x) = \frac{□}{7} - \frac{3}{2}$ $a = \frac{1}{7}$ $b = \frac{-3}{2}$

★★2. Calculez le taux de variation de la droite qui passe par les points suivants.

**a** (3, 2) et (4, $^-$4)

**1** $(x_1, y_1) = (3, 2)$
$(x_2, y_2) = (4, -4)$

**2** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$a = \frac{-4 - 2}{4 - 3}$
$a = \frac{-6}{1}$
$a = -6$

**RÉPONSE** Le taux de variation est $^-$6.

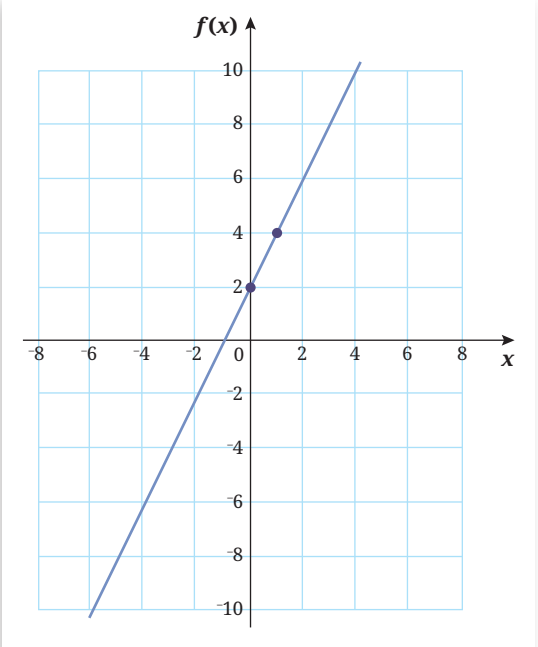
**b** ($^-$154, 96) et (12, $^-$80)

**1** $(x_1, y_1) = (-154, 96)$
$(x_2, y_2) = (12, -80)$

**2** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$a = \frac{-80 - 96}{12 - -154}$
$a = \frac{-176}{166}$
$a = \frac{-88}{83}$

**RÉPONSE** Le taux de variation est $\frac{-88}{83}$.

★★3. Écrivez la règle de la fonction représentée ci-dessous.




**1** $(x_1, y_1) = (0, 2)$
$(x_2, y_2) = (1, 4)$

**2** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$a = \frac{4 - 2}{1 - 0}$
$a = \frac{2}{1}$
$a = 2$

**3** $f(x) = ax + b$
$2 = 2(0) + b$
$b = 2$

**4** $f(x) = 2x + 2$

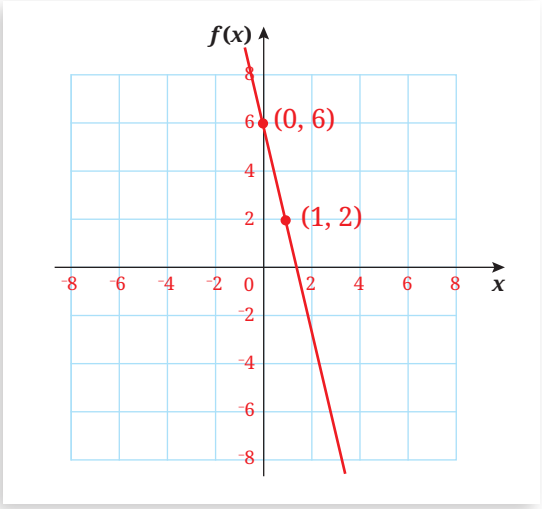
**RÉPONSE** La règle est $f(x) = 2x + 2$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

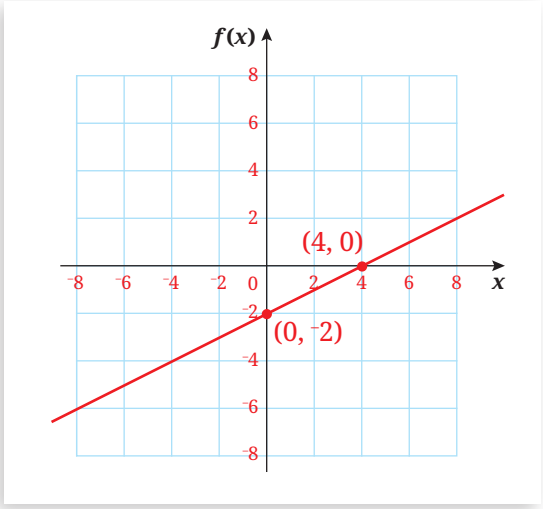
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**★★4.** Tracez la droite représentée par chaque règle.

**a** $f(x) = -4x + 6$

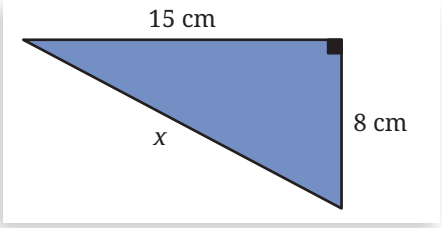



**b** $f(x) = \frac{x}{2} - 2$




**★5.** Déterminez la valeur manquante dans les triangles rectangles suivants.

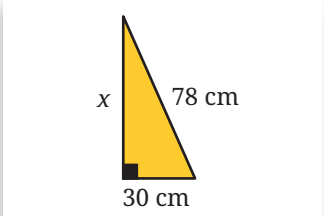
**a**




$a^2 + b^2 = c^2$
$15^2 + 8^2 = x^2$
$225 + 64 = x^2$
$289 = x^2$
$17 = x$

**RÉPONSE** $x = 17$ cm

**b**




$a^2 + b^2 = c^2$
$30^2 + x^2 = 78^2$
$900 + x^2 = 6084$
$x^2 = 5184$
$x = 72$

**RÉPONSE** $x = 72$ cm

**★6.** Écrivez s'il s'agit de droites perpendiculaires, sécantes ou parallèles.

**a** Deux droites qui se coupent à angle droit (90°). Perpendiculaires.

**b** Deux droites qui se coupent en un seul point. Sécantes.

**c** Deux droites qui ne se croisent jamais puisque la distance qui les sépare est constante. Parallèles.

# 3.1 L'ÉQUATION D'UNE DROITE

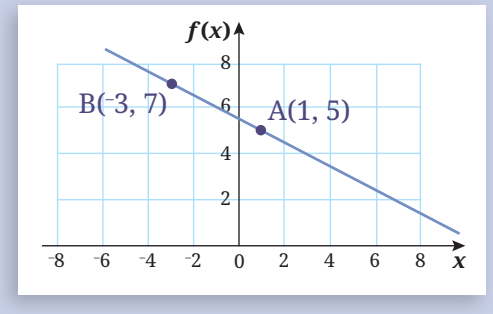
## Calculer une pente

La **pente d'une droite (*a*)** correspond à un nombre qui décrit son inclinaison. Pour la calculer, il faut effectuer le rapport entre l'accroissement des ordonnées ($\Delta y$) et l'accroissement des abscisses ($\Delta x$). La formule suivante permet de calculer la pente d'une droite qui passe par deux points $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$.

$$\text{Pente } (a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

**EXEMPLE**

**Calculer la pente d'une droite passant par les points A(1, 5) et B(⁻3, 7).**




| | |
|---|---|
| **1.** Déterminer les coordonnées des deux points. | $(x_1, y_1) = A(1, 5)$ et $(x_2, y_2) = B(⁻3, 7)$ |
| **2.** Utiliser la formule pour calculer la pente. | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>$a = \frac{7 - 5}{⁻3 - 1} = \frac{2}{⁻4}$<br>$a = \frac{⁻1}{2}$ ou $⁻0{,}5$<br>La pente de la droite est de $\frac{⁻1}{2}$ ou $⁻0{,}5$. |

## EXERCICES

★**1.** Déterminez la pente de la droite passant par les points suivants.

**a** A(1, 0) et B(3, ⁻2)

**1** $(x_1, y_1) = A(1, 0)$ et $(x_2, y_2) = B(3, ⁻2)$

**2** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{⁻2 - 0}{3 - 1} = \frac{⁻2}{2}$

$a = ⁻1$

**RÉPONSE** La droite a une pente de ⁻1.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**b** A(0,5 ; $^-$0,9) et B($^-$2,5 ; 7,1)

**1** $(x_1, y_1) = A(0{,}5\,;\,{}^-0{,}9)$ et $(x_2, y_2) = B({}^-2{,}5\,;\,7{,}1)$

**2** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{7{,}1 - {}^-0{,}9}{{}^-2{,}5 - 0{,}5} = \dfrac{8}{{}^-3}$

$a = \dfrac{{}^-8}{3}$ ou $^-2{,}\overline{6}$

**RÉPONSE** La droite a une pente de $\dfrac{{}^-8}{3}$ ou $^-2{,}\overline{6}$.

★★**2.** Deux voisins, Étienne et Michel, comparent la vitesse à laquelle leur boyau d'arrosoir peut remplir la petite piscine pour enfants au début de l'été. Voici les observations qu'ils ont faites chacun de leur côté.

**Étienne**
Après 15 minutes, il y avait 8 litres d'eau dans la piscine et, après 30 minutes, il y en avait 16.

**Michel**
Après 40 minutes, il y avait 20 litres d'eau dans la piscine et, après 50 minutes, il y en avait 35.

Quel boyau d'arrosoir a le plus grand débit d'eau ?

**1** Pente de la droite pour le boyau d'arrosoir d'Étienne

$(x_1, y_1) = (15, 8)$ et $(x_2, y_2) = (30, 16)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{16 - 8}{30 - 15}$

$a = \dfrac{8}{15}$ ou $0{,}5\overline{3}$

**2** Pente de la droite pour le boyau d'arrosoir de Michel

$(x_1, y_1) = (40, 20)$ et $(x_2, y_2) = (50, 35)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{35 - 20}{50 - 40}$

$a = \dfrac{15}{10} = \dfrac{3}{2}$ ou 1,5

**RÉPONSE** Le boyau d'arrosoir de Michel a un plus grand débit d'eau, puisque celui-ci est de 1,5 L/min et que le débit d'eau du boyau d'Étienne est de $0{,}5\overline{3}$ L/min.

## Déterminer l'équation d'une droite

Une **droite** s'exprime généralement sous la forme suivante.

$y = ax + b$
où $a$ correspond à la pente de la droite
et $b$ à son ordonnée à l'origine.

Pour déterminer l'**équation d'une droite**, il y a deux situations possibles :

- à partir de la pente et d'un point ;
- à partir de deux points.

**EXEMPLE 1**

**Déterminer l'équation de la droite ayant une pente de 2 et passant par le point (4, 8).**

| | |
|---|---|
| **1.** Remplacer $a$ par la pente de la droite dans l'équation. | $y = ax + b$<br>$y = 2x + b$ |
| **2.** Substituer les valeurs de $x$ et de $y$ dans l'équation par le point connu, puis isoler $b$. | $8 = 2(4) + b$<br>$8 = 8 + b$<br>$0 = b$ |
| **3.** Écrire l'équation de la droite. | $y = 2x + 0$ donc $y = 2x$ |

**EXEMPLE 2**

**Déterminer l'équation de la droite passant par les points $(^{-}7, 3)$ et $(^{-}10, ^{-}12)$.**

| | |
|---|---|
| **1.** Calculer la pente $a$ et la remplacer par sa valeur dans l'équation. | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{^{-}12 - 3}{^{-}10 - ^{-}7} = \frac{^{-}15}{^{-}3} = 5$<br>$y = ax + b$<br>$y = 5x + b$ |
| **2.** Substituer les valeurs de $x$ et de $y$ dans l'équation par n'importe quel des deux points connus, puis isoler $b$. | $3 = 5(^{-}7) + b$<br>$3 = ^{-}35 + b$<br>$38 = b$ |
| **3.** Écrire l'équation de la droite. | $y = 5x + 38$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** À l'aide de la pente et d'un point, déterminez l'équation des droites suivantes.

**a** Pente $= \frac{-3}{5}$ et A($-10$, 5)

1 $y = ax + b$

$y = \frac{-3}{5}x + b$

2 $5 = \frac{-3}{5}(-10) + b$

$5 = 6 + b$

$-1 = b$

3 $y = \frac{-3}{5}x - 1$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = \frac{-3}{5}x - 1$.

**b** Pente $= -4$ et A($-1$, 10)

1 $y = ax + b$

$y = -4x + b$

2 $10 = -4(-1) + b$

$10 = 4 + b$

$6 = b$

3 $y = -4x + 6$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = -4x + 6$.

**c** Pente = 0,8 et A(2,1 ; $-3,5$)

1 $y = ax + b$

$y = 0,8x + b$

2 $-3,5 = 0,8(2,1) + b$

$-3,5 = 1,68 + b$

$-5,18 = b$

3 $y = 0,8x - 5,18$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = 0,8x - 5,18$.

**d** Pente $= \frac{2}{3}$ et A(60, 100)

1 $y = ax + b$

$y = \frac{2}{3}x + b$

2 $100 = \frac{2}{3}(60) + b$

$100 = 40 + b$

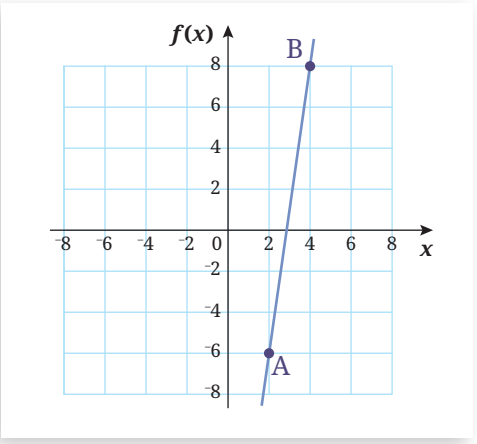
$60 = b$

3 $y = \frac{2}{3}x + 60$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = \frac{2}{3}x + 60$.

★**2.** Écrivez l'équation de la droite passant par les deux points dans chaque plan cartésien.

**a**




**1** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - {}^-6}{4 - 2} = \dfrac{14}{2} = 7$

$y = ax + b$

$y = 7x + b$

**2** ${}^-6 = 7(2) + b$

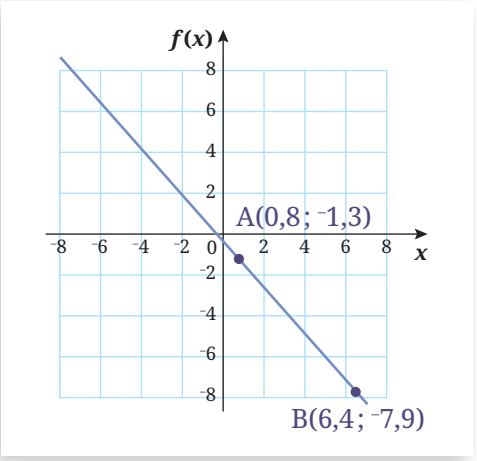
${}^-6 = 14 + b$

${}^-20 = b$

**3** $y = 7x - 20$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = 7x - 20$.

**b**




**1** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{{}^-7{,}9 - {}^-1{,}3}{6{,}4 - 0{,}8} = \dfrac{{}^-6{,}6}{5{,}6} = {}^-1{,}18$

$y = ax + b$

$y = {}^-1{,}18x + b$

**2** ${}^-1{,}3 = {}^-1{,}18(0{,}8) + b$

${}^-1{,}3 = {}^-0{,}94 + b$

${}^-0{,}36 = b$

**3** $y = {}^-1{,}18x - 0{,}36$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = {}^-1{,}18x - 0{,}36$.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Un remonte-pente permet aux skieurs et skieuses de se rendre au sommet d'une montagne. Au pied de la montagne, soit à une altitude de 320 m par rapport au niveau du sol, un petit groupe monte à bord d'une cabine. Après 1 min 12, il se trouve 216 m plus haut.

**a** Quelle est l'équation de la droite qui représente l'altitude de cette cabine, en mètres, en fonction du temps, en secondes ?

**1** Définition des variables
$x$ : temps écoulé (s)
$y$ : altitude (m)

**2** Coordonnées de l'ordonnée à l'origine de la droite
(0, 320)

**3** Coordonnées d'un autre point appartenant à la droite
(72, 536)

**4** Équation de la droite à partir de deux points

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{536 - 320}{72 - 0} = \frac{216}{72} = 3$$

$$y = ax + b$$
$$y = 3x + b$$
$$320 = 3(0) + b$$
$$320 = b$$
$$y = 3x + 320$$

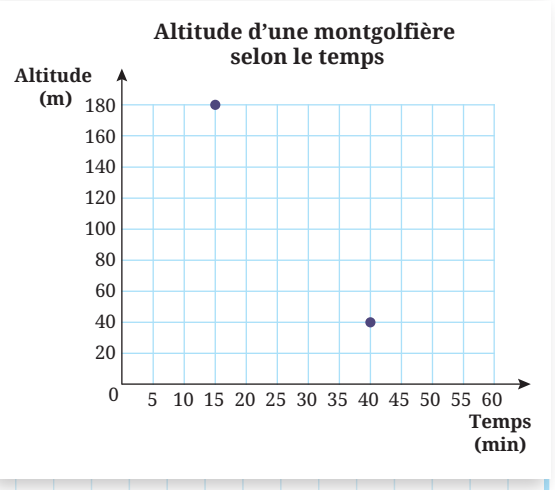
**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = 3x + 320$.

**b** Quelle est la vitesse du remonte-pente ?

La vitesse correspond à la pente de la droite $y = 3x + 320$.
$a = 3$

**RÉPONSE** La vitesse du remonte-pente est de 3 m/s.

**4.** Le graphique ci-contre représente l'altitude atteinte par une montgolfière selon le temps écoulé depuis le début de la descente.




**a** Quelle équation représente cette situation ?

**1** (15, 180) et (40, 40)

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{40 - 180}{40 - 15} = \frac{-140}{25} = \frac{-28}{5} \text{ ou } -5{,}6$$

$y = ax + b$

$y = -5{,}6x + b$

**2** $180 = -5{,}6(15) + b$

$180 = -84 + b$

$264 = b$

**3** $y = -5{,}6x + 264$

**RÉPONSE** L'équation de la droite est $y = -5{,}6x + 264$.

**b** À quelle altitude se trouvait la montgolfière lorsqu'elle a commencé sa descente ?

$y = -5{,}6x + 264$

$y = -5{,}6(0) + 264$

$y = 264$

**RÉPONSE** La montgolfière se trouvait à une altitude de 264 m.

**c** Après combien de temps la montgolfière se trouvait-elle à 152 m ?

$y = -5{,}6x + 264$

$152 = -5{,}6x + 264$

$-112 = -5{,}6x$

$20 = x$

**RÉPONSE** La montgolfière se trouvait à 152 m après 20 minutes.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

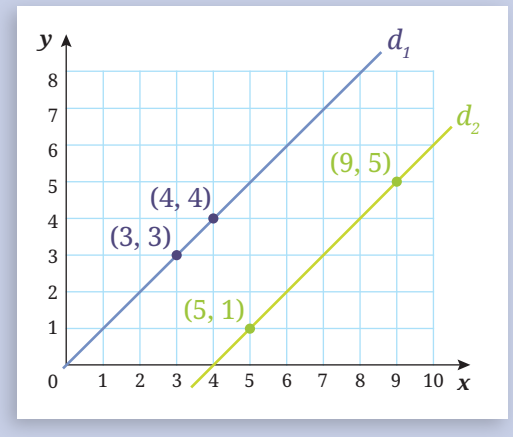
# 3.2 LA POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

## Les types de droites et leur position relative

Dans un plan cartésien, il est possible de caractériser deux droites selon leur position relative.

**EXEMPLE 1**

**Les droites parallèles distinctes $d_1$ et $d_2$ ont les mêmes pentes, mais leurs ordonnées à l'origine sont différentes ($a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$). Ces droites ne se croisent jamais et la distance qui les sépare est toujours égale.**




Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_1$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{4 - 3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= x + b \\ 3 &= 3 + b \\ 0 &= b \\ y &= x \end{aligned}$$

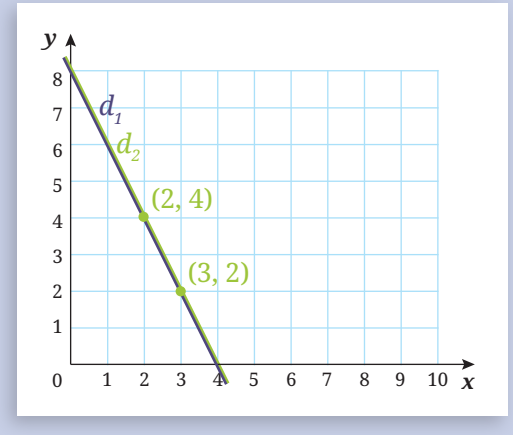
Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_2$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{9 - 5} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= x + b \\ 1 &= 5 + b \\ -4 &= b \\ y &= x - 4 \end{aligned}$$

**EXEMPLE 2**

**Les droites parallèles confondues $d_1$ et $d_2$ ont les mêmes pentes et les mêmes ordonnées à l'origine ($a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$). Elles se superposent en tout point.**




Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_1$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{3 - 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= -2x + b \\ 4 &= -2(2) + b \\ 4 &= -4 + b \\ 8 &= b \\ y &= -2x + 8 \end{aligned}$$

Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_2$.

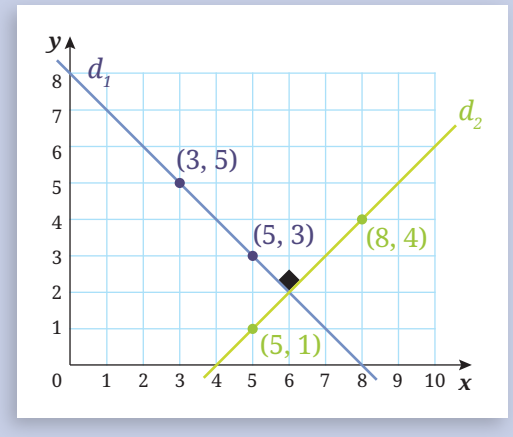
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 4}{3 - 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\begin{aligned} y &= ax + b \\ y &= -2x + b \\ 4 &= -2(2) + b \\ 4 &= -4 + b \\ 8 &= b \\ y &= -2x + 8 \end{aligned}$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**EXEMPLE 3**

**Les droites perpendiculaires $d_1$ et $d_2$ se coupent à angle droit (90°). Elles ont des pentes opposées et inverses, car le produit de leurs pentes est $^-1$.**




Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_1$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 5}{5 - 3} = \frac{^-2}{2} = ^-1$$

$$y = ax + b$$
$$y = ^-x + b$$
$$5 = ^-(3) + b$$
$$5 = ^-3 + b$$
$$8 = b$$
$$y = ^-x + 8$$

Pente, ordonnée à l'origine et équation de $d_2$.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{8 - 5} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = ax + b$$
$$y = x + b$$
$$4 = 1(8) + b$$
$$4 = 8 + b$$
$$^-4 = b$$
$$y = x - 4$$

Le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est toujours égal à $^-1$ : $^-1 \bullet 1 = ^-1$.

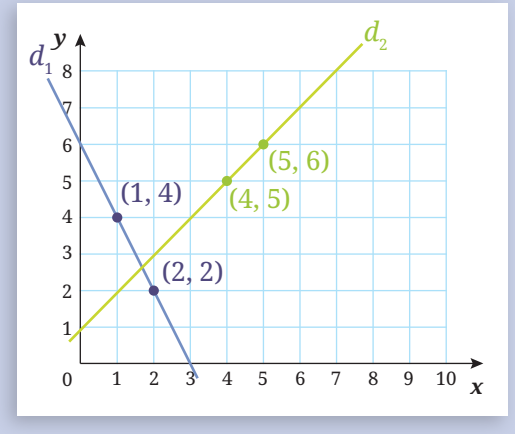
**Note :** Pour vérifier si deux droites sont perpendiculaires, on peut calculer le produit de leurs pentes.

Dans le cas où deux droites sont perpendiculaires, $y_1 = 3x + 1$ et $y_2 = \frac{^-□}{3} + 4$, le produit de leurs pentes est $3 \bullet \frac{^-1}{3} = ^-1$.

Dans le cas où deux droites ne sont pas perpendiculaires, $y_1 = ^-2x + 5$ et $y_2 = 2x + 7$, le produit de leurs pentes donne $^-2 \bullet 2 = ^-4$, donc $\neq ^-1$.

**EXEMPLE 4**

**Les droites sécantes non perpendiculaires $d_1$ et $d_2$ se croisent en un seul point d'intersection. Elles ne sont donc ni parallèles ni perpendiculaires.**




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

**★1.** Déterminez si les droites suivantes sont parallèles distinctes, parallèles confondues, perpendiculaires ou sécantes.

**a** $d_1 : y = 2x + 1$ et $d_2 : y = 2x + 8$ — Parallèles distinctes.

**b** $d_1 : y = x + 1$ et $d_2 : y = -x + 8$ — Perpendiculaires.

**c** $d_1 : y = -0{,}6x + 2$ et $d_2 : y = 6x - 3$ — Sécantes.

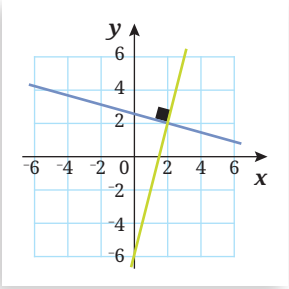
**d** $d_1 : y = -4x + 2$ et $d_2 : y = -4x + 2$ — Parallèles confondues.

**e** $d_1 : y = \frac{-9}{2}x - 5$ et $d_2 : y = \frac{2}{9}x + 5$ — Perpendiculaires.

**f** $d_1 : y = -5{,}7x - 3$ et $d_2 : y = -5{,}7x - 30$ — Parallèles distinctes.

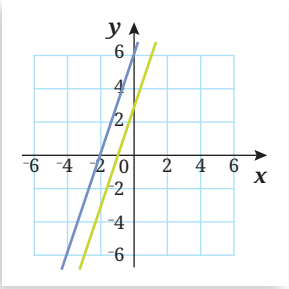
**★2.** Indiquez de quel type de droites il s'agit.

**a**



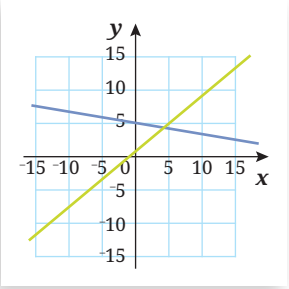

Perpendiculaires.

**b**




Parallèles distinctes.

**c**




Sécantes.

**★3.** Déterminez si chaque énoncé est vrai ou faux. S'il est faux, rectifiez-le.

**a** Deux droites sont parallèles confondues si elles ont les mêmes pentes et les mêmes ordonnées à l'origine.

Vrai.

**b** Deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs pentes est égal à 1.

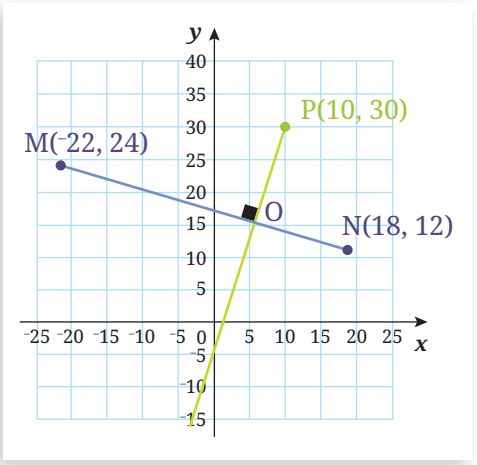
Faux. Le produit de leurs pentes doit être égal à $-1$.

**c** Deux droites sont parallèles distinctes si elles n'ont pas les mêmes ordonnées à l'origine.

Faux. Deux droites sont parallèles distinctes si elles ont les mêmes pentes, mais des ordonnées à l'origine différentes.

★★**4.** Écrivez l'équation de la médiatrice du segment MN de chacune des situations ci-dessous.

**a**




**1** Équation du segment MN

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12 - 24}{18 - {}^-22} = \frac{{}^-12}{40} = \frac{{}^-3}{10}$$

ou $^-0{,}3$

$y = ax + b$

$y = {}^-0{,}3x + b$

$24 = {}^-0{,}3({}^-22) + b$

$24 = 6{,}6 + b$

$17{,}4 = b$

$y = {}^-0{,}3x + 17{,}4$

**2** Pente de la médiatrice

$^-0{,}3 \cdot a = {}^-1$

$a = 3{,}3$

**3** Équation de la médiatrice

$y = ax + b$

$y = 3{,}3x + b$

$30 = 3{,}3(10) + b$

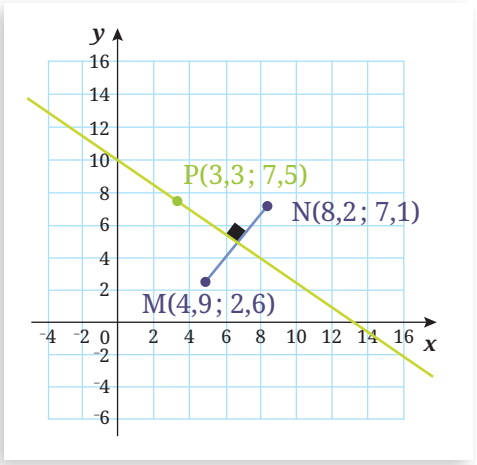
$30 = 33 + b$

$^-3 = b$

$y = 3{,}3x - 3$

**RÉPONSE** L'équation de la médiatrice du segment MN est $y = 3{,}3x - 3$.

**b**




**1** Équation du segment MN

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7{,}1 - 2{,}6}{8{,}2 - 4{,}9} = \frac{4{,}5}{3{,}3}$$

$= 1{,}36$

$y = ax + b$

$y = 1{,}36x + b$

$2{,}6 = 1{,}36(4{,}9) + b$

$2{,}6 = 6{,}66 + b$

$^-4{,}06 = b$

$y = 1{,}36x - 4{,}06$

**2** Pente de la médiatrice

$1{,}36 \cdot a = {}^-1$

$a = {}^-0{,}74$

**3** Équation de la médiatrice

$y = ax + b$

$y = {}^-0{,}74x + b$

$7{,}5 = {}^-0{,}74(3{,}3) + b$

$7{,}5 = {}^-2{,}44 + b$

$9{,}94 = b$

$y = {}^-0{,}74x + 9{,}94$

**RÉPONSE** L'équation de la médiatrice du segment MN est $y = {}^-0{,}74x + 9{,}94$.

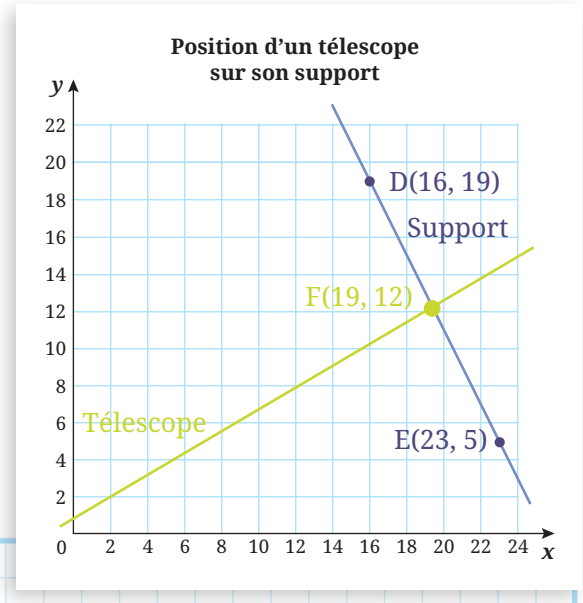
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**5.** L'inclinaison d'un télescope est très importante pour observer des objets célestes. Pour être en mesure de varier cette inclinaison, on installe le télescope sur un support à 90° muni d'un pivot. Déterminez l'équation de la droite qui représente le support, puis celle qui représente la position du télescope sur son support.




**a** Quelle est l'équation de la droite qui représente la position du support du télescope ?

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 19}{23 - 16} = \frac{-14}{7} = -2$$

$y = ax + b$

$y = -2x + b$

$19 = -2(16) + b$

$19 = -32 + b$

$51 = b$

$y = -2x + 51$

**RÉPONSE** L'équation de la droite qui représente la position du support du télescope est $y = -2x + 51$.

**b** Quelle est l'équation de la droite qui représente le télescope sur son support ?

**1** Pente de la droite du télescope

$-2 \cdot a = -1$

$a = \frac{1}{2}$

**2** Équation de la droite du télescope

$y = ax + b$

$y = \frac{1}{2}x + b$

$12 = \frac{1}{2}(19) + b$

$12 = 9{,}5 + b$

$2{,}5 = b$

$y = \frac{1}{2}x + 2{,}5$

**RÉPONSE** L'équation de la droite qui représente le télescope sur son support est $y = \frac{x}{2} + 2{,}5$.

# 3.3 LA DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

## Calculer la distance entre deux points

La **distance entre deux points** dist(A, B) correspond à la longueur du segment reliant un point A et un point B. Elle s'exprime toujours par un nombre plus grand que zéro et il est possible de la calculer à l'aide de la formule suivante.

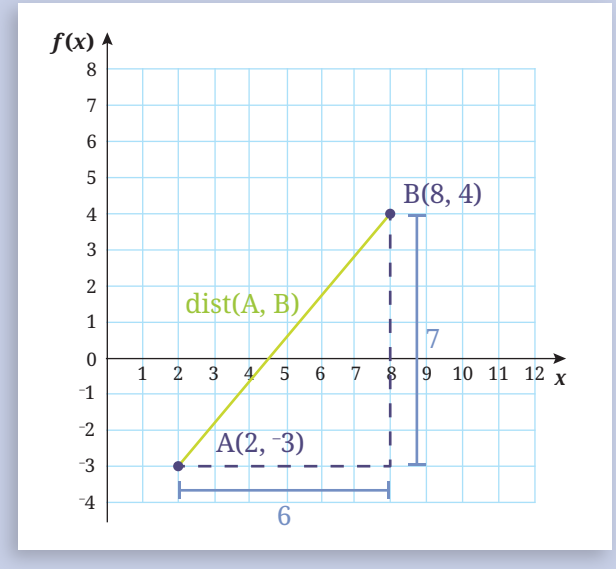
$$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

où $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont les coordonnées des deux points.

**Note :** L'ordre des points n'a pas d'importance.

**EXEMPLE**

**Soit les points A(2, ⁻3) et B(8, 4) dans le plan cartésien ci-dessous.**




| | |
|---|---|
| **1.** Écrire les coordonnées des points A et B, puis déterminer les points $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$. | A(2, ⁻3) et B(8, 4)<br>$(x_1, y_1) = (2, -3)$ et $(x_2, y_2) = (8, 4)$ |
| **2.** Calculer la distance entre les deux points en utilisant la formule. | $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$<br>$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(8 - 2)^2 + (4 - -3)^2}$<br>$\text{dist(A, B)} = \sqrt{6^2 + 7^2}$<br>$\text{dist(A, B)} = \sqrt{85} = 9{,}22$ unités<br>La distance entre A et B est de 9,22 unités. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★1. Déterminez la distance entre les points A et B.

**a** A(1, 0) et B(⁻2, 4)

1 A(1, 0) et B(⁻2, 4)
$(x_1, y_1) = (1, 0)$ et $(x_2, y_2) = (⁻2, 4)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(⁻2 - 1)^2 + (4 - 0)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(⁻3)^2 + 4^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{25} = 5$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 5 unités.

**b** A(⁻8, ⁻3) et B(0, 5)

1 A(⁻8, ⁻3) et B(0, 5)
$(x_1, y_1) = (⁻8, ⁻3)$ et $(x_2, y_2) = (0, 5)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{0 - ⁻8)^2 + (5 - ⁻3)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{8^2 + 8^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 11,31 unités.

**c** $A\left(\frac{5}{2}, ⁻1\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

1 $A\left(\frac{5}{2}, ⁻1\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
$(x_1, y_1) = \left(\frac{5}{2}, ⁻1\right)$ et $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (0 - ⁻1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(⁻2)^2 + 1^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{5} \approx 2{,}34$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 2,34 unités.

**d** A(6,1 ; 3,4) et B(5,9 ; 7,6)

1 A(6,1 ; 3,4) et B(5,9 ; 7,6)
$(x_1, y_1) = (6{,}1\,;\,3{,}4)$ et $(x_2, y_2) = (5{,}9\,;\,7{,}6)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(5{,}9 - 6{,}1)^2 + (7{,}6 - 3{,}4)^2}$

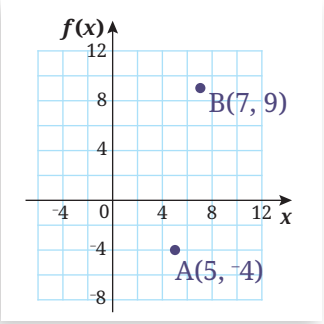
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(⁻0{,}2)^2 + (4{,}2)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{17{,}68} \approx 4{,}20$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 4,20 unités.

★**2.** Calculez la distance entre les deux points dans chaque plan cartésien.

**a**




**1** A(5, $^-$4) et B(7, 9)
$(x_1, y_1) = (5, ^-4)$ et $(x_2, y_2) = (7, 9)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

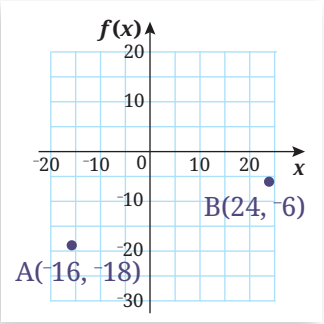
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(7 - 5)^2 + (9 - ^-4)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{2^2 + 13^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{173} \approx 13{,}15$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 13,15 unités.

**b**




**1** A($^-$16, $^-$18) et B(24, $^-$6)
$(x_1, y_1) = (^-16, ^-18)$ et $(x_2, y_2) = (24, ^-6)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

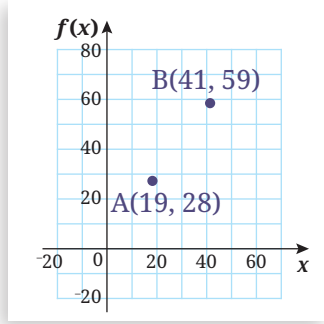
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{24 - ^-16)^2 + (^-6 - ^-18)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{40^2 + 12^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{1744} \approx 41{,}76$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 41,76 unités.

**c**




**1** A(19, 28) et B(41, 59)
$(x_1, y_1) = (19, 28)$ et $(x_2, y_2) = (41, 59)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

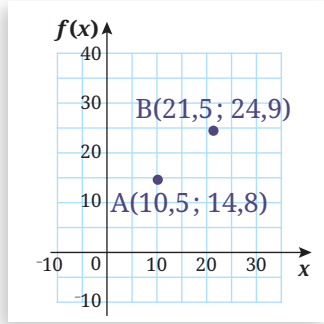
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(41 - 19)^2 + (59 - 28)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{22^2 + 31^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{1445} \approx 38{,}01$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 38,01 unités.

**d**




**1** A(10,5 ; 14,8) et B(21,5 ; 24,9)
$(x_1, y_1) = (10{,}5 ; 14{,}8)$ et
$(x_2, y_2) = (21{,}5 ; 24{,}9)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(21{,}5 - 10{,}5)^2 + (24{,}9 - 14{,}8)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(11)^2 + (10{,}1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{223{,}01} \approx 14{,}93$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 14,93 unités.

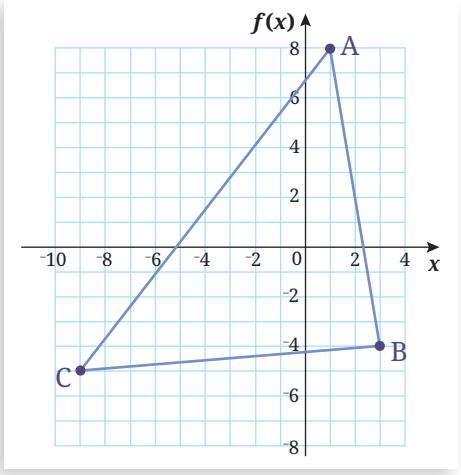
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**3.** Déterminez le périmètre de chacune des figures ci-dessous.

**a**




**1** Distance entre A et B

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (^-4 - 8)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{2^2 + (^-12)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{148} \approx 12{,}17$

**2** Distance entre B et C

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(^-9 - 3)^2 + (^-5 - ^-4)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(^-12)^2 + (^-1)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{145} \approx 12{,}04$

**3** Distance entre C et A

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(^-9 - 1)^2 + (^-5 - 8)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(^-10)^2 + (^-13)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{269} \approx 16{,}40$

**4** Périmètre

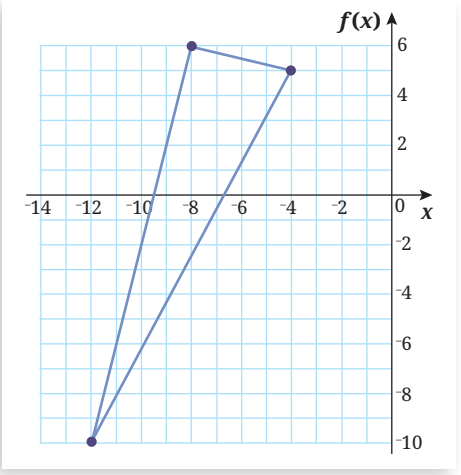
$P = \text{dist(A, B)} + \text{dist(B, C)} + \text{dist(C, A)}$

$P \approx 12{,}17 + 12{,}04 + 16{,}40$

$P \approx 40{,}61$

**RÉPONSE** Le périmètre de la figure mesure 40,61 unités.

**b**




**1** Distance entre A et B

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(^-8 - ^-4)^2 + (^-6 - 5)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(^-4)^2 + (^-1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$

**2** Distance entre B et C

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(^-12 - ^-8)^2 + (^-10 - 6)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(^-4)^2 + (^-16)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{272} \approx 16{,}49$

**3** Distance entre C et A

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(^-12 - ^-4)^2 + (^-10 - 5)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{(^-8)^2 + (^-15)^2}$

$\text{dist(C, A)} = \sqrt{289} = 17$

**4** Périmètre

$P = \text{dist(A, B)} + \text{dist(B, C)} + \text{dist(C, A)}$

$P \approx 4{,}12 + 16{,}49 + 17$

$P = 37{,}61$

**RÉPONSE** Le périmètre de la figure mesure 37,61 unités.

★★**4.** Liliane et Oliver s'amusent à discuter avec un walkie-talkie. À quelle distance, en mètres, se trouvent-ils l'un de l'autre si la position de Liliane dans un plan cartésien est L(16, ⁻18) et celle d'Oliver est O(⁻10, ⁻12) ?

**1** L(16, ⁻18) et O(⁻10, ⁻12)
$(x_1, y_1) = (16, ⁻18)$ et $(x_2, y_2) = (⁻10, ⁻12)$

**2** $\text{dist(L, O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$\text{dist(L, O)} = \sqrt{(⁻10 - 16)^2 + (⁻12 - ⁻18)^2}$
$\text{dist(L, O)} = \sqrt{(⁻26)^2 + (6)^2}$
$\text{dist(L, O)} = \sqrt{712} = 26{,}68$

**RÉPONSE** La distance entre Liliane et Oliver est de 26,68 m.

★★**5.** Sur une carte géographique, la ferme d'Yves se trouve à la position (1568,56 ; 2618,23) et celle de Kevin à la position (⁻1934,16 ; 5877,45). Quelle distance, en mètres, sépare les deux fermes à vol d'oiseau ?

**1** Y(1568,56 ; 2618,23) et K(⁻1934,16 ; 5877,45)
$(x_1, y_1) = (1568{,}56 ; 2618{,}23)$ et $(x_2, y_2) = (⁻1934{,}16 ; 5877{,}45)$

**2** $\text{dist(Y, K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$\text{dist(Y, K)} = \sqrt{(⁻1934{,}16 - 1568{,}56)^2 + (5877{,}45 - 2618{,}23)^2}$
$\text{dist(Y, K)} = \sqrt{(⁻3502{,}72)^2 + (3259{,}22)^2}$
$\text{dist(Y, K)} = \sqrt{22\ 891\ 562{,}41} = 4784{,}51$

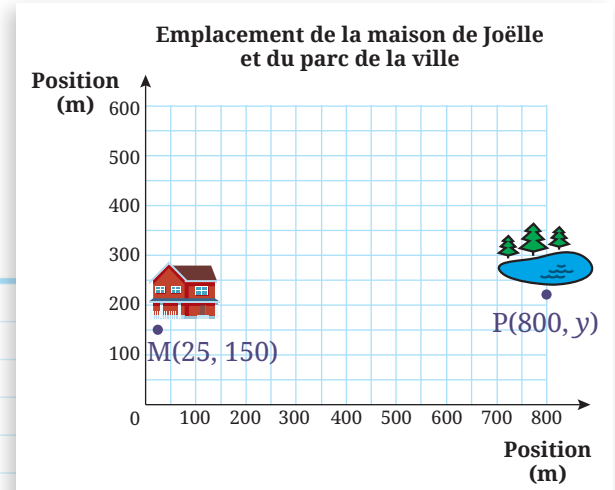
**RÉPONSE** La distance entre les deux fermes est de 4784,51 m.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**6.** Joëlle vient de se faire construire une nouvelle maison. Si la distance la plus petite entre la maison et le parc que la ville compte aménager est de 780 m, quel est l'emplacement exact du parc ?




**1** M(25, 150) et P(800, $y$)
$(x_1, y_1) = (25, 150)$, $(x_2, y_2) = (800, y)$
et dist(M, P) = 780

**2** $\text{dist(M, P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$780 = \sqrt{(800 - 25)^2 + (\square - 150)^2}$

$780 = \sqrt{775^2 + (\square - 150)^2}$

$780^2 = 775^2 + (y - 150)^2$

$608\,400 = 600\,625 + (y - 150)^2$

$7775 = (y - 150)^2$

$\sqrt{7775} = (y - 150)$

$88{,}18 \approx y - 150$

$238{,}18 \approx y$

**RÉPONSE** L'emplacement exact du parc est P(800 ; 238,18).

★★**7.** Karly se trouve chez sa grand-mère à la position géographique (134, $^-92$). Quelle distance la sépare de Loan, qui est chez lui à la position géographique ($^-56$, $^-178$) ?

**1** A(134, $^-92$) et B($^-56$, $^-178$)
$(x_1, y_1) = (134, {}^-92)$ et $(x_2, y_2) = ({}^-56, {}^-178)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{({}^-56 - 134)^2 + ({}^-178 - {}^-92)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{({}^-190)^2 + ({}^-86)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{44\,260} \approx 210{,}38$

**RÉPONSE** La distance qui sépare Karly de Loan est de 210,38 unités.

# 3.4 LE POINT MILIEU

## Déterminer les coordonnées du point milieu d'un segment

Le **point milieu** d'un segment sépare celui-ci en deux sections d'égale longueur. Sur un segment AB, la distance entre le point A et le point milieu M est la même que celle entre le point B et le point milieu M. Pour déterminer les coordonnées du point milieu d'un segment, on utilise la formule suivante.

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ et } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

où $(x_m, y_m)$ sont les coordonnées du point milieu,
et $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)$ sont celles des extrémités du segment.

**Note :** Le résultat est le même peu importe l'ordre des points.

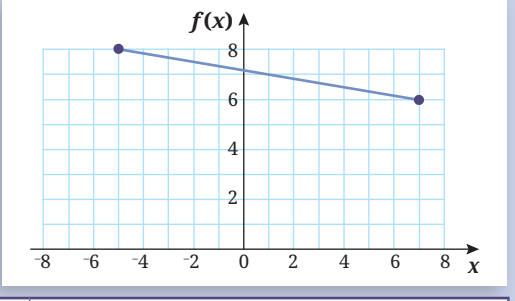
**EXEMPLE 1**

**Déterminer le point milieu M d'un segment formé par les points A(2, 4) et B(⁻4, ⁻10).**

| | |
|---|---|
| **1.** Déterminer le point 1 et le point 2. | $(x_1, y_1) = (2, 4)$<br>$(x_2, y_2) = (^-4, ^-10)$ |
| **2.** Utiliser la formule pour calculer $x_m$. | $x_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2} = \frac{2 + ^-4}{2} = \frac{^-2}{2} = ^-1$ |
| **3.** Utiliser la formule pour calculer $y_m$. | $y_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2} = \frac{4 + ^-10}{2} = \frac{^-6}{2} = ^-3$ |
| **4.** Réécrire les coordonnées du point milieu M. | $(x_m, y_m) = (^-1, ^-3)$ |

**EXEMPLE 2**

**Déterminer le point milieu M du segment AB suivant.**




| | |
|---|---|
| **1.** Déterminer le point 1 et le point 2. | $(x_1, y_1) = (^-5, 8)$<br>$(x_2, y_2) = (7, 6)$ |
| **2.** Utiliser la formule pour calculer $x_m$. | $x_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2} = \frac{^-5 + 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$ |
| **3.** Utiliser la formule pour calculer $y_m$. | $y_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2} = \frac{8 + 6}{2} = \frac{14}{2} = 7$ |
| **4.** Réécrire les coordonnées du point milieu M. | $(x_m, y_m) = (1, 7)$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** Déterminez les coordonnées du point milieu M des segments formés par les points suivants.

**a** A(0, 6) et B(4, 8)

**1** $(x_1, y_1) = (0, 6)$
$(x_2, y_2) = (4, 8)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 + 4}{2} = \frac{4}{2} = 2$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{6 + 8}{2} = \frac{14}{2} = 7$

**4** $(x_m, y_m) = (2, 7)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment AB est (2, 7).

**b** D(⁻4, 3) et E(2, 6)

**1** $(x_1, y_1) = (-4, 3)$
$(x_2, y_2) = (2, 6)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2}$

**4** $(x_m, y_m) = \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment DE est $\left(-1, \frac{9}{2}\right)$.

**c** J(⁻9, ⁻9) et N(9, 9)

**1** $(x_1, y_1) = (-9, -9)$
$(x_2, y_2) = (9, 9)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-9 + 9}{2} = \frac{0}{2} = 0$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-9 + 9}{2} = \frac{0}{2} = 0$

**4** $(x_m, y_m) = (0, 0)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment JN est (0, 0).

**d** X(1, 20) et Y(⁻7, 12)

**1** $(x_1, y_1) = (1, 20)$
$(x_2, y_2) = (-7, 12)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + -7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

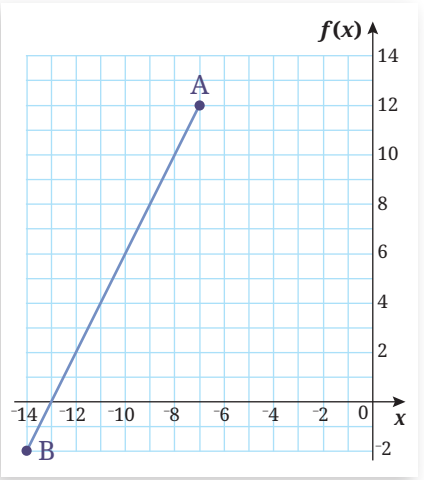
**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{20 + 12}{2} = \frac{32}{2} = 16$

**4** $(x_m, y_m) = (-3, 16)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment XY est (⁻3, 16).

★**2.** Calculez le point milieu M des segments suivants.

**a**




**1** $(x_1, y_1) = (-7, 12)$
$(x_2, y_2) = (-14, -2)$

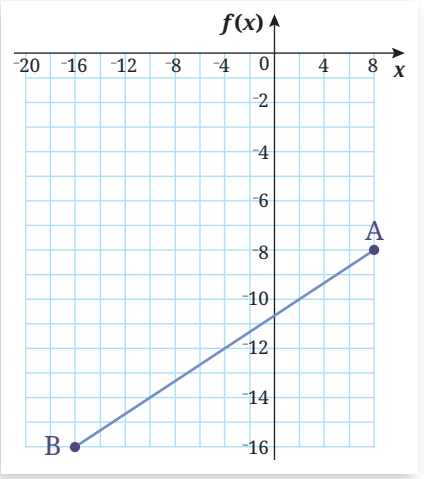
**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-7 + -14}{2} = \frac{-21}{2}$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{12 + -2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

**4** $(x_m, y_m) = \left(\frac{-21}{2}, 5\right)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment AB est $\left(\frac{-21}{2}, 5\right)$.

**b**




**1** $(x_1, y_1) = (8, -8)$
$(x_2, y_2) = (-16, -16)$

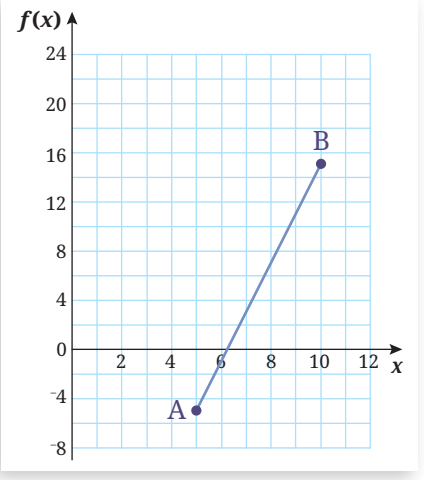
**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{8 + -16}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-8 + -16}{2} = \frac{-24}{2} = -12$

**4** $(x_m, y_m) = (-4, -12)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment AB est $(-4, -12)$.

**c**




**1** $(x_1, y_1) = (5, -5)$
$(x_2, y_2) = (10, 15)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 10}{2} = \frac{15}{2}$

**3** $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5 + 15}{2} = \frac{10}{2} = 5$

**4** $(x_m, y_m) = \left(\frac{15}{2}, 5\right)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment AB est $\left(\frac{15}{2}, 5\right)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

## Déterminer les coordonnées d'un des points situés à l'extrémité d'un segment à partir du point milieu

On peut déterminer les coordonnées d'un des points situés à l'extrémité d'un segment à partir du point milieu M et des coordonnées du point situé à l'autre extrémité. Pour valider une réponse, il est possible d'utiliser la formule pour trouver le point milieu d'un segment et vérifier si l'égalité est exacte.

**EXEMPLE**

**Déterminer les coordonnées du point B si les coordonnées du point milieu M du segment AB sont (⁻0,25 ; 1) et que celles du point A sont (3,5 ; 2).**

| | |
|---|---|
| **1.** Écrire les points connus. | $(x_1, y_1) = (3{,}5\,;\,2)$<br>$(x_m, y_m) = (^{-}0{,}25\,;\,1)$ |
| **2.** Utiliser la formule pour calculer les coordonnées en $x$ et en $y$ du point recherché. | $\frac{x_1 + x_2}{2} = x_m$<br>$\frac{3{,}5 + x_2}{2} = {}^{-}0{,}25$<br>$3{,}5 + x_2 = {}^{-}0{,}5$<br>$x_2 = {}^{-}4$<br><br>$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_m$<br>$\frac{2 + y_2}{2} = 1$<br>$2 + y_2 = 2$<br>$y_2 = 0$ |
| **3.** Écrire les coordonnées du point recherché. | $(x_2, y_2) = ({}^{-}4, 0)$ |
| **4.** Valider la réponse en utilisant la formule pour trouver le point milieu M d'un segment.<br><br>**Note :** Cette étape est facultative. | $(x_1, y_1) = (3{,}5\,;\,2)$<br>$(x_2, y_2) = ({}^{-}4, 0)$<br>$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3{,}5 + {}^{-}4}{2} = \frac{{}^{-}0{,}5}{2} = {}^{-}0{,}25$<br>$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1$<br>M(⁻0,5 ; 1)<br>Les coordonnées du point M correspondent bien au point milieu. |

# EXERCICES

★**1.** **a** Déterminez les coordonnées du point B du segment AB si celles du point A sont (86, ⁻20) et que celles du point M sont (⁻12, 50).

**1** $(x_1, y_1) = (86, {}^{-}20)$
$(x_m, y_m) = ({}^{-}12, 50)$

**2**
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_m$$
$$\frac{86 + x_2}{2} = {}^{-}12$$
$$86 + x_2 = {}^{-}24$$
$$x_2 = {}^{-}110$$
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_m$$
$$\frac{{}^{-}20 + y_2}{2} = 50$$
$${}^{-}20 + y_2 = 100$$
$$y_2 = 120$$

**3** $(x_2, y_2) = ({}^{-}110, 120)$

**4** $(x_1, y_1) = (86, {}^{-}20)$
$(x_2, y_2) = ({}^{-}110, 120)$
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{86 + {}^{-}110}{2} = {}^{-}12$$
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{{}^{-}20 + 120}{2} = 50$$
$(x_m, y_m) = ({}^{-}12, 50)$

Les coordonnées du point M correspondent bien au point milieu.

**RÉPONSE** Les coordonnées du point B sont (⁻110, 120).

**b** Déterminez les coordonnées du point A du segment AB si celles de B sont (6, ⁻2) et celles du point milieu M sont $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$.

**1** $(x_1, y_1) = (6, {}^{-}2)$
$(x_m, y_m) = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

**2**
$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_m$$
$$\frac{6 + x_2}{2} = \frac{9}{2}$$
$$6 + x_2 = 9$$
$$x_2 = 3$$
$$\frac{y_1 + y_2}{2} = y_m$$
$$\frac{{}^{-}2 + y_2}{2} = 1$$
$${}^{-}2 + y_2 = 2$$
$$y_2 = 4$$

**3** $(x_2, y_2) = (3, 4)$

**4** $(x_1, y_1) = (3, 4)$
$(x_2, y_2) = (6, {}^{-}2)$
$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2}$$
$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + {}^{-}2}{2} = 1$$
$(x_m, y_m) = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

Les coordonnées du point M correspondent bien au point milieu.

**RÉPONSE** Les coordonnées du point A sont (3, 4).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**2.** Indiquez les coordonnées du point B sachant que celles du point A sont (20, 5) et que celles du point milieu M du segment AB sont (5, 7).

**1** $(x_1, y_1) = (20, 5)$
$(x_m, y_m) = (5, 7)$

**2** $\frac{x_1 + x_2}{2} = 5$
$\frac{20 + x_2}{2} = 5$
$20 + x_2 = 10$
$x_2 = -10$
$\frac{y_1 + y_2}{2} = 7$
$\frac{5 + y_2}{2} = 7$
$5 + y_2 = 14$
$y_2 = 9$

**3** $(x_2, y_2) = (-10, 9)$

**4** $(x_1, y_1) = (20, 5)$
$(x_2, y_2) = (-10, 9)$
$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{20 + -10}{2} = 5$
$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 9}{2} = 7$
$(x_m, y_m) = (5, 7)$

Les coordonnées du point M correspondent bien au point milieu.

**RÉPONSE** Les coordonnées du point B sont $(-10, 9)$.

★**3.** Après avoir fait sa lessive, Jérémy accroche un de ses chandails sur une corde à linge suspendue entre le poteau A(25, 75) et le poteau B(45, 85). Précisez la position du chandail si Jérémy a fait glisser celui-ci jusqu'au milieu de la corde à linge.

**1** $(x_1, y_1) = (25, 75)$
$(x_2, y_2) = (45, 85)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{25 + 45}{2} = \frac{70}{2} = 35$
$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{75 + 85}{2} = \frac{160}{2} = 80$

**3** $(x_m, y_m) = (35, 80)$

**RÉPONSE** La position du chandail sur la corde à linge est (35, 80).

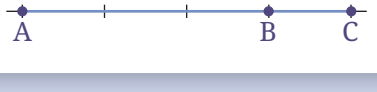
# 3.5 LE POINT DE PARTAGE

## Indiquer la position d'un point de partage sur un segment

Le **point de partage** d'un segment sépare celui-ci en deux sections selon un rapport ou une fraction donnée $\frac{a}{b}$, où $a$ est la longueur de la section entre le point de départ et le point de partage, et $b$ est la longueur totale du segment. Puisqu'elle est basée sur le point de départ choisi, la fraction peut être différente selon le cas.

**EXEMPLE 1**

**Le point de partage B se situe aux $\frac{3}{4}$ du segment AC ou au $\frac{1}{4}$ du segment CA.**




**EXEMPLE 2**

**Le point de partage E se situe aux $\frac{2}{5}$ du segment FD ou aux $\frac{3}{5}$ du segment DF.**

## EXERCICES

★1. Indiquez si chaque énoncé est vrai ou faux.

**a** Un point qui se situe aux $\frac{3}{5}$ sur un segment AB est plus éloigné du point A que le point milieu. — Vrai.

**b** Un point qui se situe aux $\frac{2}{3}$ du segment MN est plus éloigné du point N que du point M. — Faux.

**c** Un point qui se situe au $\frac{1}{4}$ du segment PO est plus près du point O que du point P. — Faux.

**d** Un point qui se situe au $\frac{1}{3}$ du segment DE est plus éloigné du point E que du point D. — Vrai.

**e** Un point qui se situe aux $\frac{9}{10}$ du segment KJ est plus éloigné du point J que du point K. — Faux.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★2. Déterminez la position des points de partage des segments suivants.
Écrivez les deux réponses possibles.

**a**

Le point de partage B est situé aux $\frac{5}{6}$ du segment AC ou au $\frac{1}{6}$ du segment CA.

**b**

Le point de partage N est situé aux $\frac{3}{5}$ du segment MO ou aux $\frac{2}{5}$ du segment OM.

**c**

Le point de partage Q est situé aux $\frac{7}{10}$ du segment PR ou aux $\frac{3}{10}$ du segment RP.

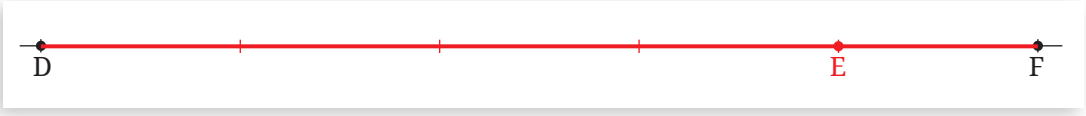
**d**

Le point de partage E est situé au $\frac{1}{3}$ du segment DF ou aux $\frac{2}{3}$ du segment FD.

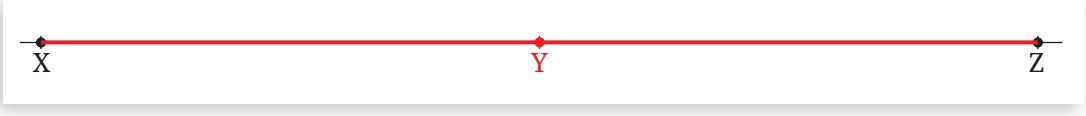
★★3. Situez les points de partage donnés sur les segments suivants.

**a** Le point B se situe au $\frac{1}{4}$ du segment AC.

**b** Le point E se situe aux $\frac{4}{5}$ du segment DF.




**c** Le point Y se situe au $\frac{1}{2}$ du segment XZ.



## Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon une fraction donnée

Il est possible de déterminer les **coordonnées d'un point de partage d'un segment selon une fraction donnée** $k = \frac{a}{b}$, où $a$ est la longueur de la section entre le point de départ et le point de partage, et $b$ est la longueur totale du segment.

Pour y parvenir, on utilise la formule suivante.

$$(x_p, y_p) = (x_1 + k(x_2 - x_1), y_1 + k(y_2 - y_1))$$

où $(x_p, y_p)$ sont les coordonnées du point de partage,
$(x_1, y_1)$ sont les coordonnées du point de départ,
$(x_2, y_2)$ sont les coordonnées de l'autre extrémité du segment
et $k$ est la fraction donnée.

Pour simplifier les calculs, on divise la formule en deux pour déterminer $x_p$ et $y_p$ comme suit.

$$x_p = x_1 + k(x_2 - x_1) \text{ et } y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$$

**EXEMPLE 1**

**Déterminer les coordonnées du point de partage qui se situe aux $\frac{3}{4}$ du segment AB si les coordonnées de A sont (2, 3) et que celles de B sont ($^-$8, 6).**

| | |
|---|---|
| **1.** Écrire les données connues et indiquer ce qui est recherché. | $(x_1, y_1) = (2, 3)$<br>$(x_2, y_2) = (^-8, 6)$<br>$k = \frac{3}{4}$<br>$(x_p, y_p) = ?$ |
| **2.** Utiliser la formule pour calculer les coordonnées du point recherché. | $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$<br>$x_p = 2 + \frac{3}{4}(^-8 - 2)$<br>$x_p = 2 - \frac{15}{2}$<br>$x_p = \frac{^-11}{2}$ ou $^-5{,}5$<br>$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$<br>$y_p = 3 + \frac{3}{4}(6 - 3)$<br>$y_p = 3 + \frac{9}{4}$<br>$y_p = \frac{21}{4}$ ou 5,25 |
| **3.** Réécrire les coordonnées du point recherché. | $(x_p, y_p) = \left(\frac{^-11}{2}, \frac{21}{4}\right)$ ou $(^-5{,}5\,;\,5{,}25)$<br>Les coordonnées du point de partage sont $\left(\frac{^-11}{2}, \frac{21}{4}\right)$ ou $(^-5{,}5\,;\,5{,}25)$. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**EXEMPLE 2**

**Déterminer les coordonnées du point B si celles du point A sont (5,1 ; ⁻1) et que celles du point de partage qui se situe aux $\frac{2}{5}$ du segment AB sont (3 ; ⁻2,8).**

| | |
|---|---|
| **1.** Écrire les données connues et indiquer ce qui est recherché. | $(x_1, y_1) = (5{,}1\,;\,{}^{-}1)$<br>$(x_p, y_p) = (3\,;\,{}^{-}2{,}8)$<br>$k = \frac{2}{5}$<br>$(x_2, y_2) = ?$ |
| **2.** Utiliser la formule pour déterminer les coordonnées d'un point de partage $(x_p, y_p)$. | $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$<br>$3 = 5{,}1 + \frac{2}{5}(x_2 - 5{,}1)$<br>$3 = 5{,}1 + \frac{2}{5}x_2 - 2{,}04$<br>${}^{-}0{,}06 = \frac{2}{5}x_2$<br>${}^{-}0{,}15 = x_2$<br>$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$<br>${}^{-}2{,}8 = {}^{-}1 + \frac{2}{5}(y_2 - {}^{-}1)$<br>${}^{-}2{,}8 = {}^{-}1 + \frac{2}{5}y_2 + \frac{2}{5}$<br>${}^{-}2{,}2 = \frac{2}{5}y_2$<br>${}^{-}5{,}5 = y_2$ |
| **3.** Réécrire les coordonnées du point recherché. | $(x_2, y_2) = ({}^{-}0{,}15\,;\,{}^{-}5{,}5)$<br>Les coordonnées du point B sont (⁻0,15 ; ⁻5,5). |

## EXERCICES

★**1.** Soit un point de partage P situé aux $\frac{2}{3}$ d'un segment AB qui mesure 9 cm.

**a** Quelle est la mesure de la section entre le point A et le point de partage P ?

$\frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{18}{3} = 6$ cm

**b** Quelle est la mesure de la section entre le point de partage P et le point B ?

$\frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3$ cm

**c** Combien mesurerait la section entre le point A et le point de partage P si celui-ci se situait au $\frac{1}{3}$ du segment AB ?

$\frac{1}{3} \cdot 9 = \frac{9}{3} = 3$ cm

★**2.** Déterminez les coordonnées du point de partage P des segments suivants.

**a** P est situé aux $\frac{5}{6}$ du segment ED : D(0, $^-4$) et E($^-20$, 8).

**1** $(x_1, y_1) = (^-20, 8)$
$(x_2, y_2) = (0, ^-4)$
$k = \frac{5}{6}$
$(x_p, y_p) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = ^-20 + \frac{5}{6}(0 - ^-20)$
$x_p = ^-20 + \frac{50}{3}$
$x_p = \frac{^-10}{3}$ ou $^-3,\overline{3}$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 8 + \frac{5}{6}(^-4 - 8)$
$y_p = 8 - 10$
$y_p = ^-2$

**3** $(x_p, y_p) = \left(\frac{^-10}{3}, ^-2\right)$ ou $(^-3,\overline{3}; ^-2)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point de partage P sont $\left(\frac{^-10}{3}, ^-2\right)$ ou $(^-3,\overline{3}; ^-2)$.

**b** P est situé aux $\frac{2}{11}$ du segment JK : J(3,8 ; 2,1) et K($^-5$,4 ; 7,9).

**1** $(x_1, y_1) = (3,8; 2,1)$
$(x_2, y_2) = (^-5,4; 7,9)$
$k = \frac{2}{11}$
$(x_p, y_p) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = 3,8 + \frac{2}{11}(^-5,4 - 3,8)$
$x_p = 3,8 - 1,67$
$x_p = 2,13$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 2,1 + \frac{2}{11}(7,9 - 2,1)$
$y_p = 2,1 + 1,05$
$y_p = 3,15$

**3** $(x_p, y_p) = (2,13; 3,15)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point de partage P sont (2,13 ; 3,15).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Léanne part en vélo du point M(10, ⁻50) pour se rendre jusqu'au point N(25, ⁻100). Après avoir parcouru les $\frac{9}{10}$ de la distance, elle s'arrête pour boire une gorgée d'eau. Quelles sont les coordonnées de l'endroit où elle se trouve à ce moment ?

**1** $(x_1, y_1) = (10, ⁻50)$
$(x_2, y_2) = (25, ⁻100)$
$k = \frac{9}{10}$
$(x_p, y_p) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = 10 + \frac{9}{10}(25 - 10)$
$x_p = 10 + \frac{27}{2}$
$x_p = \frac{47}{2}$ ou 23,5
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = ⁻50 + \frac{9}{10}(⁻100 - ⁻50)$
$y_p = ⁻50 - 45$
$y_p = ⁻95$

**3** $(x_p, y_p) = \left(\frac{47}{2}, ⁻95\right)$ ou (23,5 ; ⁻95)

**RÉPONSE** Les coordonnées de l'endroit où elle se trouve sont $\left(\frac{47}{2}, ⁻95\right)$ ou (23,5 ; ⁻95).

★★**4.** Pascal part d'un petit village qui se situe à (92, 28) pour se rendre à Saguenay, qui se trouve à (⁻70, 15). En chemin, il fait une pause dans une halte routière dont la position est (51,5 ; 24,75) pour se dégourdir et manger un sandwich. À quelle fraction du trajet total se situe la halte routière ?

**1** $(x_1, y_1) = (92, 28)$
$(x_2, y_2) = (⁻70, 15)$
$(x_p, y_p) = (51{,}5 ; 24{,}75)$
$k = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$51{,}5 = 92 + k(⁻70 - 92)$
$⁻40{,}5 = ⁻162k$
$k = 0{,}25 = \frac{1}{4}$

**3** $k = \frac{1}{4}$

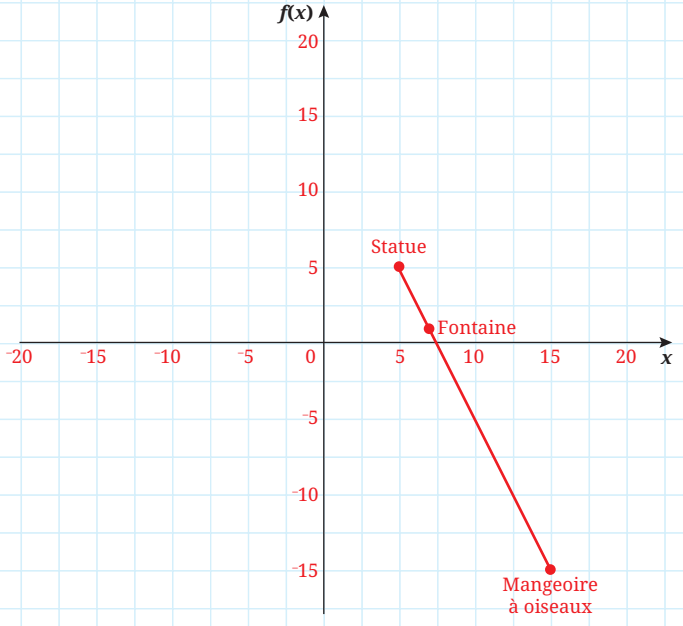
**RÉPONSE** La halte routière se situe au $\frac{1}{4}$ du trajet total.

**5.** Un touriste entre sur le site d'un jardin. Il désire s'attarder dans la première section pour observer trois attractions : une statue, une fontaine et une mangeoire à oiseaux. Géographiquement, la statue est positionnée à (5, 5) et la fontaine à (7, 1). Sachant que la fontaine se situe en ligne droite au cinquième de la distance entre la statue et la mangeoire à oiseaux, déterminez la position de la mangeoire à oiseaux et représentez le jardin dans le plan cartésien.

**1** $(x_1, y_1) = (5, 5)$
$(x_p, y_p) = (7, 1)$
$k = \frac{1}{5}$
$(x_2, y_2) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$7 = 5 + \frac{1}{5}(x_2 - 5)$
$7 = 5 + x\frac{2}{5} - 1$
$3 = x\frac{2}{5}$
$x_2 = 15$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$1 = 5 + \frac{1}{5}(y_2 - 5)$
$1 = 5 + y\frac{2}{5} - 1$
$^-3 = y\frac{2}{5}$
$y_2 = {}^-15$

**3** $(x_2, y_2) = (15, {}^-15)$




**RÉPONSE** La position de la mangeoire à oiseaux est $(15, {}^-15)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



## Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon un rapport donné

Il est possible de déterminer les coordonnées d'un point de partage d'un segment selon un **rapport partie à partie** $a:b$, où $a$ est le nombre de parties d'un côté du point de partage et $b$ le nombre de parties de l'autre côté du point de partage.

Afin de trouver les coordonnées d'un point de partage selon un rapport partie à partie, il faut transformer le rapport en fraction $k$ avant d'appliquer la formule expliquée précédemment. Dans ce cas, la relation suivante peut être utilisée.

$$k = \frac{a}{a + b}$$

où $k$ est la fraction donnée,
$a$ est le nombre de parties d'un côté du point de partage
et $b$ est le nombre de parties de l'autre côté du point de partage.

**EXEMPLE 1**

**Transformer en fraction le rapport 5 : 6.**

| | |
|---|---|
| **1.** Identifier $a$ et $b$. | $a = 5$<br>$b = 6$ |
| **2.** Calculer la fraction $k$. | $k = \frac{a}{a + b}$<br>$k = \frac{5}{5 + 6}$<br>$k = \frac{5}{11}$<br>La fraction $k$ est $\frac{5}{11}$. |

**EXEMPLE 2**

**Déterminer les coordonnées du point P qui partage le segment AB dans un rapport 3 : 2, si les coordonnées de A sont (3, 5) et que celles de B sont (8, $^{-}$4).**

| | |
|---|---|
| **1.** Identifier $a$ et $b$, puis calculer $k$, si nécessaire. | $a = 3$<br>$b = 2$<br>$k = \frac{a}{a + b} = \frac{3}{3 + 2} = \frac{3}{5}$ |
| **2.** Écrire les données connues et indiquer ce qui est recherché. | $(x_1, y_1) = (3, 5)$<br>$(x_2, y_2) = (8, {}^{-}4)$<br>$k = \frac{3}{5}$<br>$(x_p, y_p) = ?$ |

| | |
|---|---|
| **3.** Utiliser la formule pour déterminer les coordonnées du point recherché. | $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$<br>$x_p = 3 + \frac{3}{5}(8 - 3)$<br>$x_p = 3 + 3$<br>$x_p = 6$<br><br>$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$<br>$y_p = 5 + \frac{3}{5}(^-4 - 5)$<br>$y_p = 5 + \frac{^-27}{5}$<br>$y_p = \frac{^-2}{5}$ ou $^-0{,}4$ |
| **4.** Réécrire les coordonnées du point recherché. | $(x_p, y_p) = \left(6, \frac{^-2}{5}\right)$ ou $(x_p, y_p) = (6\,;\,^-0{,}4)$<br>Les coordonnées du point de partage P sont $\left(6, \frac{^-2}{5}\right)$ ou $(6\,;\,^-0{,}4)$. |

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

## EXERCICES

★**1.** Transformez en fraction chacun des rapports partie à partie suivants.

**a** 1 : 6

1 $a = 1$
$b = 6$

2 $k = \frac{a}{a + b}$
$k = \frac{1}{1 + 6}$
$k = \frac{1}{7}$

**RÉPONSE** La fraction est $\frac{1}{7}$.

**b** 5 : 2

1 $a = 5$
$b = 2$

2 $k = \frac{a}{a + b}$
$k = \frac{5}{5 + 2}$
$k = \frac{5}{7}$

**RÉPONSE** La fraction est $\frac{5}{7}$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**c** 2:1

**1** $a = 2$
$b = 1$

**2** $k = \dfrac{a}{a+b}$
$k = \dfrac{2}{2+1}$
$k = \dfrac{2}{3}$

**RÉPONSE** La fraction est $\dfrac{2}{3}$.

**d** 10:3

**1** $a = 10$
$b = 3$

**2** $k = \dfrac{a}{a+b}$
$k = \dfrac{10}{10+3}$
$k = \dfrac{10}{13}$

**RÉPONSE** La fraction est $\dfrac{10}{13}$.

★★**2.** Déterminez les coordonnées du point P qui partage le segment MN dans un rapport 4:5, si les coordonnées de M sont $(^{-}12, 17)$ et que celles de N sont $(^{-}24, 39)$.

**1** $a = 4$
$b = 5$
$k = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{4}{4+5} = \dfrac{4}{9}$

**2** $(x_1, y_1) = (^{-}12, 17)$
$(x_2, y_2) = (^{-}24, 39)$
$k = \dfrac{4}{9}$
$(x_p, y_p) = ?$

**3** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = {}^{-}12 + \dfrac{4}{9}\,(^{-}24 - {}^{-}12)$
$x_p = {}^{-}12 - \dfrac{16}{3}$
$x_p = \dfrac{^{-}52}{3}$ ou $^{-}17,\overline{3}$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 17 + \dfrac{4}{9}\,(39 - 17)$
$y_p = 17 + \dfrac{88}{9}$
$y_p = \dfrac{241}{9}$ ou $26,\overline{7}$

**4** $(x_p, y_p) = \left(\dfrac{^{-}52}{3}, \dfrac{241}{9}\right)$ ou $(x_p, y_p) = (^{-}17,\overline{3}\,;\, 26,\overline{7})$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point P sont $\left(\dfrac{^{-}52}{3}, \dfrac{241}{9}\right)$ ou $(^{-}17,\overline{3}\,;\, 26,\overline{7})$.

★★**3.** Calculez les coordonnées du point P qui partage le segment SR dans un rapport 7 : 2, si les coordonnées de R sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}\right)$ et que celles de S sont $\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{3}\right)$.

**1** $a = 7$
$b = 2$
$k = \frac{a}{a+b} = \frac{7}{7+2} = \frac{7}{9}$

**2** $(x_1, y_1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{3}\right)$
$(x_2, y_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{2}\right)$
$k = \frac{7}{9}$
$(x_p, y_p) = ?$

**3** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = \frac{4}{5} + \frac{7}{9}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)$
$x_p = \frac{4}{5} - \frac{14}{135}$
$x_p = \frac{94}{135}$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = \frac{1}{3} + \frac{7}{9}\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{3}\right)$
$y_p = \frac{1}{3} - \frac{35}{54}$
$y_p = \frac{-17}{54}$

**4** $(x_p, y_p) = \left(\frac{94}{135}, \frac{-17}{54}\right)$ ou $(x_p, y_p) = (0{,}7\,;\, -0{,}31)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point P sont $\left(\frac{94}{135}, \frac{-17}{54}\right)$ ou $(0{,}7\,;\, -0{,}31)$.

★★**4.** Déterminez les coordonnées du point P qui partage le segment CD dans un rapport 4 : 7, sachant que les coordonnées du point C sont (-66, 48) et que celles du point D sont (55, -10).

**1** $a = 4$
$b = 7$
$k = \frac{a}{a+b} = \frac{4}{4+7} = \frac{4}{11}$

**2** $(x_1, y_1) = (-66, 48)$
$(x_2, y_2) = (55, -10)$
$k = \frac{4}{11}$
$(x_p, y_p) = ?$

**3** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = -66 + \frac{4}{11}(55 - -66)$
$x_p = -66 + 44$
$x_p = -22$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 48 + \frac{4}{11}(-10 - 48)$
$y_p = 48 - \frac{232}{11}$
$y_p = \frac{296}{11}$ ou 26,91

**4** $(x_p, y_p) = \left(-22, \frac{296}{11}\right)$ ou $(x_p, y_p) = (-22\,;\, 26{,}91)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point P sont $\left(-22, \frac{296}{11}\right)$ ou $(x_p, y_p) = (-22\,;\, 26{,}91)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 3

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

★1. Parmi les paires de droites suivantes, laquelle correspond à des droites parallèles distinctes ?

**a** $y_1 = 4x + 1$ et $y_2 = {}^-4x + 3$ **b** $y_1 = {}^-6x + 5$ et $y_2 = {}^-6x + 5$ **c** $y_1 = 2x - 3$ et $y_2 = 2x + 3$

★2. Quelle est l'équation d'une droite passant par les points $({}^-5, 2)$ et $(3, 8)$ ?

**a** $y = 0{,}75x + 5{,}75$ **b** $y = 0{,}75x - 1{,}75$ **c** $y = 1{,}33x + 5{,}75$ **d** $y = 1{,}33x - 1{,}75$

★3. Quelle est la valeur de la pente d'une droite perpendiculaire à $y = {}^-4x + 6$ ?

**a** $\frac{{}^-1}{4}$ **b** ${}^-4$ **c** $4$ **d** $\frac{1}{4}$

★★4. Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à la droite $y = {}^-4x + 6$ passant par le couple $(2, 3)$ ?

**a** $y = 0{,}25x + 2{,}5$ **b** $y = 4x + 6$ **c** $y = 0{,}25x + 6$ **d** $y = {}^-0{,}25x + 6$

### CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**5.** Parmi les énoncés suivants, lequel est faux ?

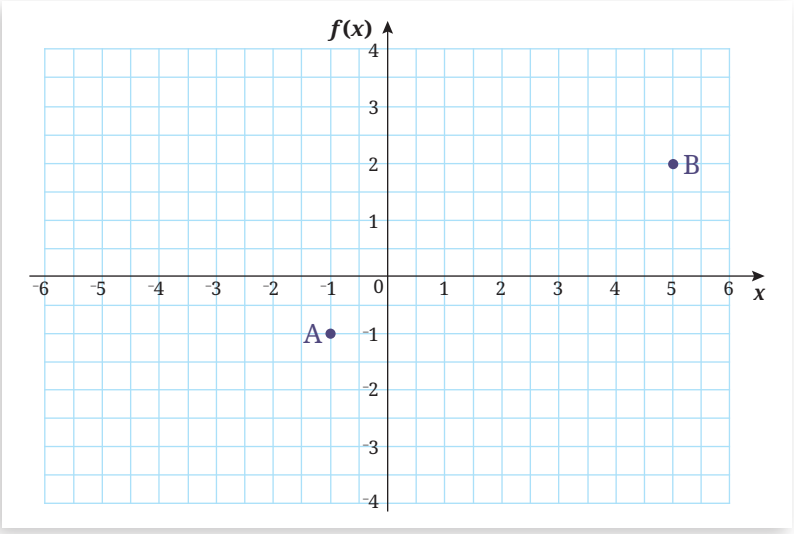
**a** L'équation d'une droite s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$.

**b** Un point P qui partage un segment dans un rapport de 3:5 se situe au milieu du segment.

**c** La distance qui sépare deux droites parallèles est toujours constante.

**d** Le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est égal à $^{-}1$.

**6.** Quelle est la distance entre les deux points dans le plan cartésien ci-dessous ?




**a** 6,71 unités **b** 45 unités **c** 3,54 unités **d** 22,5 unités

## CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**7.** Calculez la distance entre les points suivants.

**a** A(⁻4, 5) et B(⁻10, 8)

1 A(⁻4, 5) et B(⁻10, 8)
$(x_1, y_1) = (-4, 5)$ et $(x_2, y_2) = (-10, 8)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(-10 - -4)^2 + (8 - 5)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(-6)^2 + (3)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 6,71 unités.

**b** A(154, 218) et B(416, 739)

1 A(154, 218) et B(416, 739)
$(x_1, y_1) = (154, 218)$ et
$(x_2, y_2) = (416, 739)$

2 $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(416 - 154)^2 + (739 - 218)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{262^2 + 521^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{310\,085} \approx 583{,}17$

**RÉPONSE** La distance entre A et B est de 583,17 unités.

★★**8.** Déterminez le point milieu de chaque segment en fonction des extrémités indiquées.

**a** C(10, 0) et D(6, ⁻8)

1 $(x_1, y_1) = (10, 0)$
$(x_2, y_2) = (6, -8)$

2 $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8$

3 $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0 + -8}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

4 $(x_m, y_m) = (8, -4)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment CD est (8, ⁻4).

**b** $O\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ et $P\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

1 $(x_1, y_1) = \left(\frac{3}{2}, 4\right)$

$(x_2, y_2) = \left(\frac{5}{2}, -2\right)$

2 $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{4}{2} = 2$

3 $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 + -2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

4 $(x_m, y_m) = (2, 1)$

**RÉPONSE** Le point milieu M du segment OP est (2, 1).

★★**9.** Déterminez les points de partage P suivants.

**a** P est situé au $\frac{1}{3}$ du segment AB : A(1, 1) et B(8, $^{-}$6).

**1** $(x_1, y_1) = (1, 1)$
$(x_2, y_2) = (8, {}^{-}6)$
$k = \frac{1}{3}$
$(x_p, y_p) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = 1 + \frac{1}{3}(8 - 1)$
$x_p = 1 + \frac{7}{3}$
$x_p = \frac{10}{3}$ ou $3,\overline{3}$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 1 + \frac{1}{3}({}^{-}6 - 1)$
$y_p = 1 - \frac{7}{3}$
$y_p = \frac{{}^{-}4}{3}$ ou $^{-}1,\overline{3}$

**3** $(x_p, y_p) = \left(\frac{10}{3}, \frac{{}^{-}4}{3}\right)$ ou $(3,\overline{3}\,;\, {}^{-}1,\overline{3})$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point de partage P sont $\left(\frac{10}{3}, \frac{{}^{-}4}{3}\right)$ ou $(3,\overline{3}\,;\, {}^{-}1,\overline{3})$.

**b** P est situé aux $\frac{3}{4}$ du segment DC : $C\left(\frac{{}^{-}1}{2}, 4\right)$ et D(0, $^{-}$1).

**1** $(x_1, y_1) = (0, {}^{-}1)$
$(x_2, y_2) = \left(\frac{{}^{-}1}{2}, 4\right)$
$k = \frac{3}{4}$
$(x_p, y_p) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = 0 + \frac{3}{4}\left(\frac{{}^{-}1}{2} - 0\right)$
$x_p = 0 - \frac{3}{8}$
$x_p = \frac{{}^{-}3}{8}$ ou $^{-}0,38$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = {}^{-}1 + \frac{3}{4}(4 - {}^{-}1)$
$y_p = {}^{-}1 + \frac{15}{4}$
$y_p = \frac{11}{4}$ ou 2,75

**3** $(x_p, y_p) = \left(\frac{{}^{-}3}{8}, \frac{11}{4}\right)$ ou $({}^{-}0,38\,;\, 2,75)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point de partage P sont $\left(\frac{{}^{-}3}{8}, \frac{11}{4}\right)$ ou $({}^{-}0,38\,;\, 2,75)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**10.** Émilie part de l'école, dont la position est (55, ⁻40), pour se rendre à la maison de son père, laquelle se situe à la position (⁻22, 76). Rendue à (24,2 ; 6,4), elle s'arrête pour passer un appel. À quelle fraction du trajet total Émilie s'est-elle arrêtée ?

**1** $(x_1, y_1) = (55, ⁻40)$
$(x_2, y_2) = (⁻22, 76)$
$(x_p, y_p) = (24{,}2\,;\, 6{,}4)$
$k = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$24{,}2 = 55 + k(⁻22 - 55)$
$⁻30{,}8 = ⁻77k$
$0{,}4 = k$

**3** $k = 0{,}4$ ou $\frac{2}{5}$

**RÉPONSE** Lorsqu'elle s'est arrêtée, Émilie se trouvait à 0,4 ou aux $\frac{2}{5}$ du trajet total.

★★**11.** Un bateau navigue sur la mer en direction du point (300, ⁻460) sur une carte maritime. Aux $\frac{2}{3}$ du voyage, on change de commandant alors que le bateau est rendu au point (⁻200, 140). Si le parcours est rectiligne, quelles sont les coordonnées du point de départ du bateau ?

**1** $(x_2, y_2) = (300, ⁻460)$
$(x_p, y_p) = (⁻200, 140)$
$k = \frac{2}{3}$
$(x_1, y_1) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$⁻200 = x_1 + \frac{2}{3}(300 - x_1)$
$⁻200 = x_1 + 200 - \frac{2}{3}x_1$
$⁻400 = \frac{1}{3}x_1$
$x_1 = ⁻1200$

$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$140 = y_1 + \frac{2}{3}(⁻460 - y_1)$
$140 = y_1 - \frac{920}{3} - \frac{2}{3}y_1$
$\frac{1340}{3} = \frac{1}{3}y_1$
$1340 = y_1$

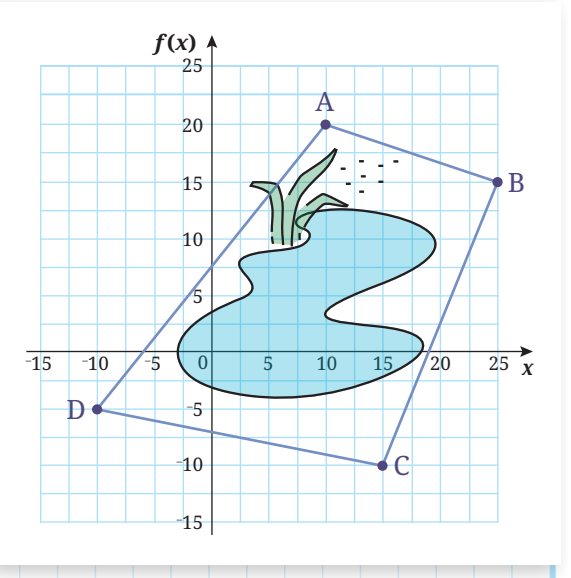
**3** $(x_1, y_1) = (⁻1200, 1340)$

**RÉPONSE** Les coordonnées du point de départ du bateau sur la carte maritime sont (⁻1200, 1340).

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

**12.** Dannick doit faire ériger une clôture pour délimiter son étang naturel. Il décide de retenir les services d'une compagnie spécialisée qui lui demande un prix de 6,25 $/m.

Quel sera le coût total de la clôture, qui est représentée par le graphique ci-contre ?




**1** Distance entre A et B

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(25 - 10)^2 + (15 - 20)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{15^2 + (^-5)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{250} = 15{,}81$

**2** Distance entre B et C

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(15 - 25)^2 + (^-10 - 15)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{(^-10)^2 + (^-25)^2}$

$\text{dist(B, C)} = \sqrt{725} = 26{,}93$

**3** Distance entre C et D

$\text{dist(C, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(C, D)} = \sqrt{(^-10 - 15)^2 + (^-5 - {}^-10)^2}$

$\text{dist(C, D)} = \sqrt{(^-25)^2 + (5)^2}$

$\text{dist(C, D)} = \sqrt{650} \approx 25{,}50$

**4** Distance entre D et A

$\text{dist(D, A)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(D, A)} = \sqrt{(^-10 - 10)^2 + (^-5 - 20)^2}$

$\text{dist(D, A)} = \sqrt{(^-20)^2 + (^-25)^2}$

$\text{dist(D, A)} = \sqrt{1025} \approx 32{,}02$

**5** Périmètre

$P = \text{dist(A, B)} + \text{dist(B, C)} + \text{dist(C, D)} + \text{dist(D, A)}$

$P = 15{,}81 + 26{,}93 + 25{,}50 + 32{,}02$

$P = 100{,}26$

**6** Coût total de la clôture

$100{,}26 \bullet 6{,}25 \approx 626{,}63$

**RÉPONSE** Le coût total de la clôture sera de 626,63 $.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**13.** Germain est un chasseur invétéré. Sur son territoire de chasse, il y a plusieurs points de repère, dont un gros sapin baumier et une montagne de sable. Sachant que la cache ($^-0{,}9\,;\,3$) se situe au milieu du chemin qui sépare le sapin baumier ($^-8,\,1$) et la montagne de sable, déterminez les coordonnées associées à la montagne de sable.

**1** $(x_1, y_1) = (^-8,\,1)$
$(x_m, y_m) = (^-0{,}9\,;\,3)$

**2** $\dfrac{\square_1 + \square_2}{2} = x_m$

$\dfrac{^-8 + \square_2}{2} = ^-0{,}9$

$^-8 + x_2 = ^-1{,}8$

$x_2 = 6{,}2$

$\dfrac{\square_1 + \square_2}{2} = y_m$

$\dfrac{1 + \square_2}{2} = 3$

$1 + y_2 = 6$

$y_2 = 5$

**3** $(x_2, y_2) = (6{,}2\,;\,5)$

**4** $(x_1, y_1) = (6{,}2\,;\,5)$
$(x_2, y_2) = (^-8,\,1)$

$x_m = \dfrac{\square_1 + \square_2}{2} = \dfrac{6{,}2 + ^-8}{2} = ^-0{,}9$

$y_m = \dfrac{\square_1 + \square_2}{2} = \dfrac{5 + 1}{2} = 3$

$(x_m, y_m) = (^-0{,}9\,;\,3)$

**RÉPONSE** Les coordonnées associées à la montagne de sable sont $(^-0{,}9\,;\,3)$.

**14.** Josianne travaille au centre commercial, situé à la position $(^-100,\,440)$. À quelle distance se trouve-t-elle, en mètres, de la station de métro, si celle-ci se situe au quart de la distance entre le centre commercial et sa maison, dont la position est $(550,\,^-820)$ ?

**1** Coordonnées de la station de métro
$(x_1, y_1) = (^-100,\,440)$
$(x_2, y_2) = (550,\,^-820)$
$k = \dfrac{1}{4}$
$(x_p, y_p) = ?$
$x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = ^-100 + \dfrac{1}{4}(550 - ^-100)$
$x_p = ^-100 + 162{,}5$
$x_p = 62{,}5$

$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = 440 + \dfrac{1}{4}(^-820 - 440)$
$y_p = 440 - 315$
$y_p = 125$
$(x_p, y_p) = (62{,}5\,;\,125)$

**2** Distance entre le centre commercial et la station de métro
$(x_1, y_1) = (^-100,\,440)$ et $(x_2, y_2) = (62{,}5\,;\,125)$

**3** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(62{,}5 - ^-100)^2 + (125 - 440)^2}$
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(162{,}5)^2 + (^-315)^2}$
$\text{dist(A, B)} = \sqrt{125\,631{,}25} \approx 354{,}44$

**RÉPONSE** La distance entre le centre commercial et la station de métro est de 354,44 m.

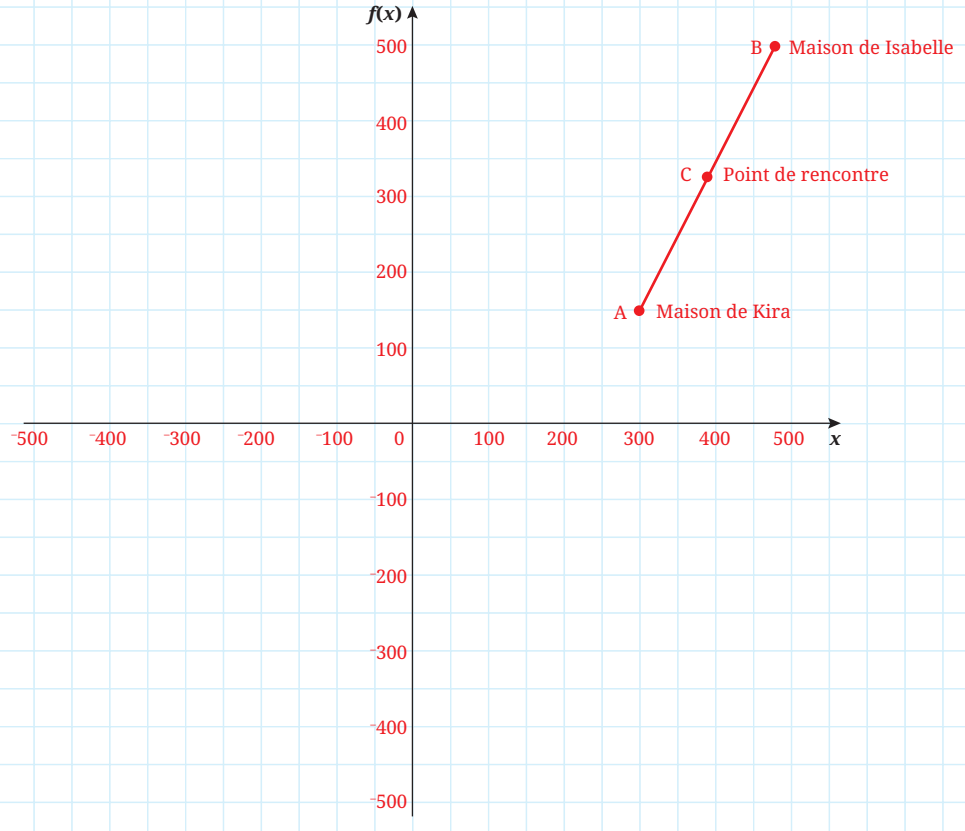
**15.** Kira et Isabelle habitent dans la même rue, qui est rectiligne. Voici la position géographique de leur maison respective : (300, 150) et (480, 500). Elles aimeraient se donner rendez-vous pour jouer aux billes au milieu de la distance qui les sépare. Calculez la position géographique de leur point de rencontre et représentez la situation graphiquement.

**1** $(x_1, y_1) = (300, 150)$
$(x_2, y_2) = (480, 500)$

**2** $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{300 + 480}{2} = \frac{780}{2} = 390$

$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{150 + 500}{2} = \frac{650}{2} = 325$

**3** $(x_m, y_m) = (390, 325)$



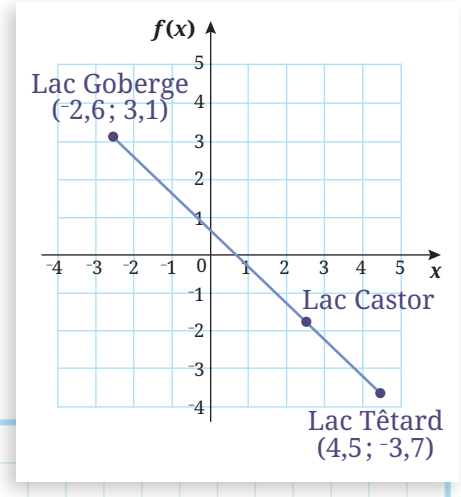

**RÉPONSE** La position géographique de leur point de rencontre est (390, 325).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**16.** Martin est directeur d'une pourvoirie et il a accès à une carte qui délimite les trois lacs les plus prisés des touristes : le lac Goberge, le lac Castor et le lac Têtard. Voici l'emplacement des lacs sur un plan gradué en kilomètres.




**a** Quelles sont les coordonnées approximatives du lac Castor, si celui-ci se situe à un rapport de 2 : 5 du segment rectiligne qui relie le lac Têtard au lac Goberge ?

**1** $a = 2$
$b = 5$
$k = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{2}{2+5} = \dfrac{2}{7}$

**2** $(x_1, y_1) = (4{,}5 ; -3{,}7)$
$(x_2, y_2) = (-2{,}6 ; 3{,}1)$
$k = \dfrac{2}{7}$
$(x_p, y_p) = ?$

**3** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$x_p = 4{,}5 + \dfrac{2}{7}(-2{,}6 - 4{,}5)$
$x_p = 4{,}5 - 2{,}03$
$x_p = 2{,}47$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$y_p = -3{,}7 + \dfrac{2}{7}(3{,}1 - -3{,}7)$
$y_p = -3{,}7 + 1{,}94$
$y_p = -1{,}76$

**4** $(x_p, y_p) = (2{,}47 ; -1{,}76)$

**RÉPONSE** Les coordonnées approximatives du lac Castor sont $(2{,}47 ; -1{,}76)$.

**b** L'an dernier, des gens ont trouvé un nouveau lac plus petit situé à $(-1{,}08 ; 1{,}64)$ sur le segment reliant le lac Goberge au lac Castor. Ils l'ont surnommé le « lac Mystère ». Quelle fraction représente l'emplacement de ce lac sur le segment ?

**1** $(x_1, y_1) = (-2{,}6 ; 3{,}1)$
$(x_2, y_2) = (2{,}47 ; -1{,}76)$
$(x_p, y_p) = (-1{,}08 ; 1{,}64)$
$k = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$-1{,}08 = -2{,}6 + k(2{,}47 - -2{,}6)$
$-1{,}08 = -2{,}6 + k(5{,}07)$
$1{,}52 = 5{,}07k$
$k \approx 0{,}3 = \dfrac{3}{10}$

$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$1{,}64 = 3{,}1 + k(-1{,}76 - 3{,}1)$
$1{,}64 = 3{,}1 + k(-4{,}86)$
$-1{,}46 = -4{,}86k$
$k \approx 0{,}3 = \dfrac{3}{10}$

**3** $k = \dfrac{3}{10}$

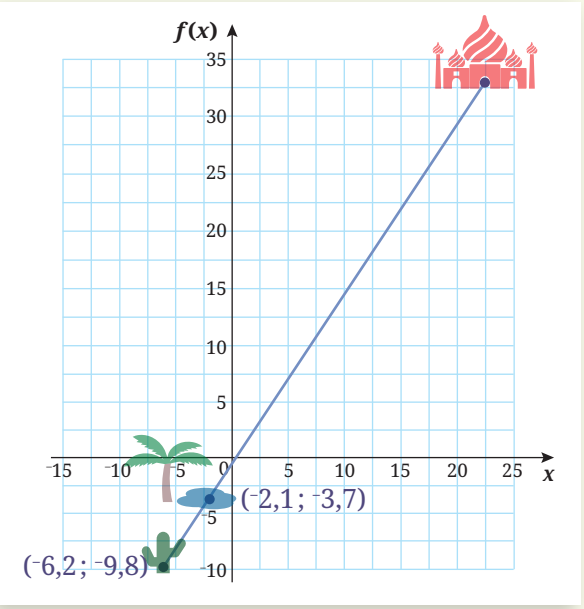
**RÉPONSE** La fraction représentant l'emplacement du lac Mystère sur le segment reliant le lac Goberge au lac Castor est $\dfrac{3}{10}$.

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## Un rallye dans le désert

Vous participerez prochainement à un rallye dans le désert et, au cours de la deuxième étape, vous devrez effectuer un arrêt dans une oasis que vous rencontrerez lorsqu'il vous restera le septième de la distance à parcourir avant de franchir la ligne d'arrivée (le cactus). Voici la carte que vous a remise votre guide à la station d'accueil au début de l'aventure.




**a** À partir de ces informations, déterminez la position de la station d'accueil.

**1** $(x_2, y_2) = (^-6{,}2\,;\,^-9{,}8)$
$(x_p, y_p) = (^-2{,}1\,;\,^-3{,}7)$
$k = \frac{6}{7}$
$(x_1, y_1) = ?$

**2** $x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$
$^-2{,}1 = x_1 + \frac{6}{7}(^-6{,}2 - x_1)$
$^-2{,}1 = x_1 - 5{,}31 - 0{,}86x_1$
$3{,}21 = 0{,}14x_1$
$x_1 = 22{,}93$
$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$
$^-3{,}7 = y_1 + \frac{6}{7}(^-9{,}8 - y_1)$
$^-3{,}7 = y_1 - 8{,}4 - 0{,}86y_1$
$4{,}7 = 0{,}14y_1$
$y_1 = 33{,}6$

**3** $(x_1, y_1) = (22{,}93\,;\,33{,}6)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée



**RÉPONSE** La position de la station d'accueil est (22,93 ; 33,6).

**b** Calculez la distance entre la station d'accueil et le cactus.

**1** A(22,93 ; 33,6) et B($^-$6,2 ; $^-$9,8)
$(x_1, y_1) = (22{,}93 ; 33{,}6)$ et $(x_2, y_2) = (^-6{,}2 ; ^-9{,}8)$

**2** $\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(^-6{,}2 - 22{,}93)^2 + (^-9{,}8 - 33{,}6)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(^-29{,}13)^2 + (^-43{,}4)^2}$

$\text{dist(A, B)} = \sqrt{2732} \approx 52{,}27$

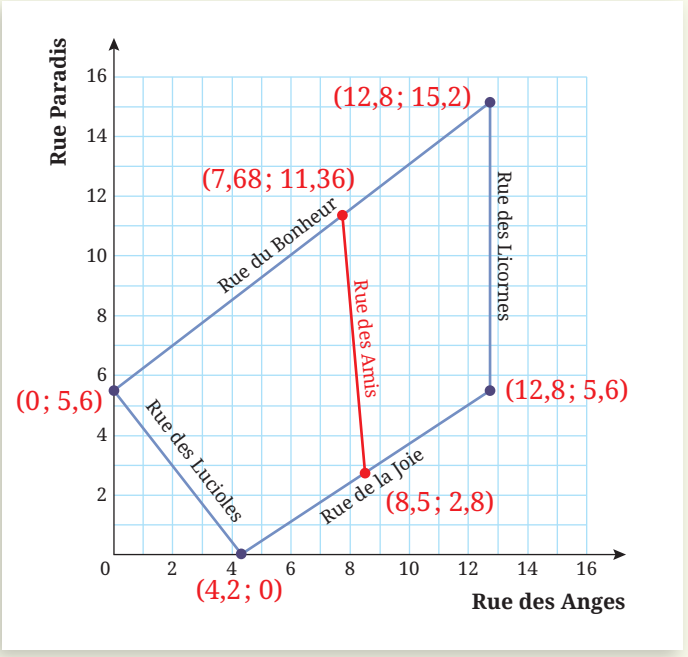
**RÉPONSE** La distance entre la station d'accueil et la ligne d'arrivée (le cactus) est de 52,27 unités.

# SITUATION-PROBLÈME

CD1

## Deux nouveaux quartiers résidentiels

Un promoteur obtient les permis de la ville pour construire deux nouveaux quartiers résidentiels. Le terrain qu'il s'est procuré est borné par les rues du Bonheur, des Licornes, de la Joie et des Lucioles. Ce grand projet est représenté par le plan ci-contre.




Voici des informations quant aux délimitations que le promoteur devra respecter pour son projet.

- Les rues Paradis et des Anges sont perpendiculaires.
- L'intersection des rues Paradis et des Anges représente l'ordonnée à l'origine dans un plan cartésien.
- Les rues du Bonheur et de la Joie sont perpendiculaires à la rue des Lucioles.
- La rue des Lucioles croise la rue Paradis aux coordonnées (0 ; 5,6).
- La rue des Lucioles croise la rue des Anges aux coordonnées (4,2 ; 0).
- Lorsqu'on roule 15,2 km sur la rue Paradis à partir de l'intersection avec la rue des Anges, on arrive vis-à-vis de l'intersection des rues du Bonheur et des Licornes.
- La rue des Licornes est parallèle à la rue Paradis.
- L'intersection des rues des Lucioles et du Bonheur et l'intersection des rues de la Joie et des Licornes se trouvent à la même distance de la rue des Anges.
- La ville permet au promoteur de créer une nouvelle rue, la rue des Amis. À la gauche de cette rue seront bâties des maisons unifamiliales alors que des jumelés seront construits de l'autre côté.
- La nouvelle rue séparera la rue du Bonheur dans un rapport de 3 : 2 et elle séparera la rue de la Joie en deux partie égales.

Calculez la superficie du quartier qui sera attribuée à la construction de jumelés.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**1** Pente de la rue des Lucioles

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{0 - 5{,}6}{4{,}2 - 0} = \frac{-5{,}6}{4{,}2}$$

$$a = \frac{-4}{3}$$

**2** Équation de la rue du Bonheur

$a = \frac{3}{4}$ (perpendiculaire à la rue des Lucioles)

$$y = \frac{3}{4}\square + 5{,}6$$

**3** Coordonnée en $x$ pour l'intersection des rues du Bonheur et des Licornes

$$y = \frac{3}{4}\square + 5{,}6$$

$$15{,}2 = \frac{3}{4}\square + 5{,}6$$

$$9{,}6 = \frac{3}{4}\square$$

$$12{,}8 = x$$

**4** Coordonnées de l'intersection des rues de la Joie et des Licornes

(12,8 ; 5,6)

**5** Longueur de la rue des Lucioles

(4,2 ; 0) et (0 ; 5,6)

$$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(0 - 4{,}2)^2 + (5{,}6 - 0)^2}$$

$$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(-4{,}2)^2 + 5{,}6^2}$$

$$\text{dist(A, D)} = \sqrt{49} = 7 \text{ km}$$

**6** Équation de la rue de la Joie

$a = \frac{3}{4}$ (perpendiculaire à la rue des Lucioles)

$$y = \frac{3}{4}\square + 0 = \frac{3}{4} \cdot 4{,}2 + \square$$

$$0 = 3{,}15 + b$$

$$-3{,}15 = b$$

$$y = \frac{3}{4}\square - 3{,}15$$

**7** Longueur de la rue du Bonheur

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(12{,}8 - 0)^2 + (15{,}2 - 5{,}6)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{12{,}8^2 + 9{,}6^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{256} = 16 \text{ km}$

**8** Longueur de la rue de la Joie

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(12{,}8 - 4{,}2)^2 + (5{,}6 - 0)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{8{,}6^2 + 5{,}6^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{105{,}32} \approx 10{,}26 \text{ km}$

**9** Aire totale du terrain

$A = \dfrac{(B + b)h}{2}$

$A = \dfrac{(16 + 10{,}26) \cdot 7}{2}$

$A \approx 91{,}91 \text{ km}^2$

**10** Coordonnées du point de partage sur la rue du Bonheur

3 : 2

$a = 3$

$b = 2$

$k = \dfrac{a}{a + b} = \dfrac{3}{3 + 2} = \dfrac{3}{5}$

$x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$

$x_p = 0 + \dfrac{3}{5}(12{,}8 - 0)$

$x_p = 7{,}68$

$y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$

$y_p = 5{,}6 + \dfrac{3}{5}(15{,}2 - 5{,}6)$

$y_p = 5{,}6 + 5{,}76$

$y_p = 11{,}36$

Les coordonnées du point de partage sont (7,68 ; 11,36).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**11** Coordonnées du point milieu sur la rue de la Joie

$(x_1, y_1) = (4{,}2\,;\,0)$

$(x_2, y_2) = (12{,}8\,;\,5{,}6)$

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4{,}2 + 12{,}8}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5$

$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0 + 5{,}6}{2} = \frac{5{,}6}{2} = 2{,}8$

Les coordonnées du point milieu sont (8,5 ; 2,8).

**12** Distance entre les rues des Lucioles et des Amis sur la rue du Bonheur

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(7{,}68 - 0)^2 + (11{,}36 - 5{,}6)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{7{,}68^2 + 5{,}76^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6 \text{ km}$

**13** Longueur entre les rues des Lucioles et des Amis sur la rue de la Joie

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{(8{,}5 - 4{,}2)^2 + (2{,}8 - 0)^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{4{,}3^2 + 2{,}8^2}$

$\text{dist(A, D)} = \sqrt{26{,}33} \approx 5{,}13 \text{ km}$

**14** Aire de la section pour les maisons unifamiliales

$A = \frac{(B + b)h}{2}$

$A = \frac{(9{,}6 + 5{,}13) \cdot 7}{2}$

$A \approx 51{,}56 \text{ km}^2$

**15** Aire de la section pour les jumelés

$91{,}91 - 51{,}56 \approx 40{,}35 \text{ km}^2$

**RÉPONSE**

L'aire de la section qui sera attribuée à la construction de jumelés est de 40,35 km².

# FEUILLE DE NOTES

## Équation d'une droite

**Calculer une pente**

1. Déterminer les coordonnées des deux points.
2. Utiliser la formule $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

**Déterminer l'équation d'une droite**

À partir de la pente et d'un point

1. Remplacer $a$ par la pente dans l'équation.
2. Substituer les valeurs de $x$ et de $y$ dans l'équation par le point connu, puis isoler $b$.
3. Écrire l'équation de la droite.

À partir de deux points

1. Calculer la pente $a$ et la remplacer par sa valeur dans l'équation.
2. Substituer les valeurs de $x$ et de $y$ dans l'équation par n'importe quel des deux points connus, puis isoler $b$.
3. Écrire l'équation de la droite.

## Point milieu

**Déterminer les coordonnées du point milieu d'un segment**

$$x_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2} \quad \text{et} \quad y_m = \frac{\square_1 + \square_2}{2}$$

**Déterminer les coordonnées d'un des points situés à l'extrémité d'un segment à partir du point milieu**

1. Écrire les points connus.
2. Utiliser la formule pour déterminer les coordonnées en $x$ et en $y$ du point recherché.
3. Écrire les coordonnées du point recherché.
4. Valider la réponse en utilisant la formule pour trouver le point milieu M d'un segment (étape facultative).

## Position relative de deux droites

**Droites parallèles distinctes**

Elles ont la même pente, mais des ordonnées à l'origine différentes.

**Droites parallèles confondues**

Elles ont la même pente et la même ordonnée à l'origine.

**Droites perpendiculaires**

Elles se coupent à angle droit (90°). Le produit de leurs pentes donne $-1$.

**Droites sécantes non perpendiculaires**

Elles se croisent en un seul point d'intersection.

## Distance entre deux points

**Déterminer la distance entre deux points**

$$\text{dist(A, B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## Point de partage

**Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon une fraction donnée**

$x_p = x_1 + k(x_2 - x_1)$ et $y_p = y_1 + k(y_2 - y_1)$

**Déterminer les coordonnées d'un point de partage selon un rapport donné**

$$k = \frac{a}{a + b}$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

4

# LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée


| | | |
|---|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | | 174 |
| **4.1** | L'interprétation d'un système d'équations | 176 |
| **4.2** | La méthode de comparaison | 180 |
| **4.3** | La méthode de substitution | 183 |
| **4.4** | La méthode de réduction | 186 |
| **4.5** | Le nombre de solutions d'un système d'équations | 200 |
| **Consolidation du chapitre 4** | | 204 |
| **Situation d'application – Du café artisanal** | | 211 |
| **Situation-problème – La collation récompense** | | 212 |
| **Feuille de notes** | | 214 |

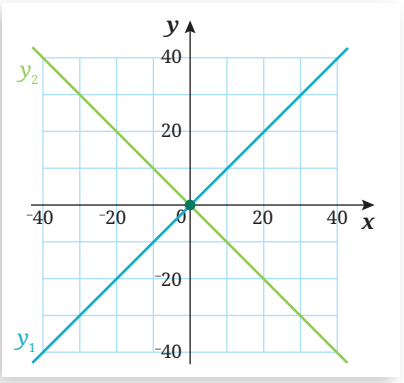
## À QUOI ÇA SERT ?

La résolution de systèmes d'équations permet de trouver des liens entre deux situations de même contexte. Que ce soit pour identifier l'emplacement de l'intersection de deux rues, pour connaître quelle compagnie propose la meilleure offre ou pour gérer son portefeuille financier, cette méthode est utile à plusieurs domaines.

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

★**1.** Déterminez le couple solution dans chacun des cas suivants.

**a**



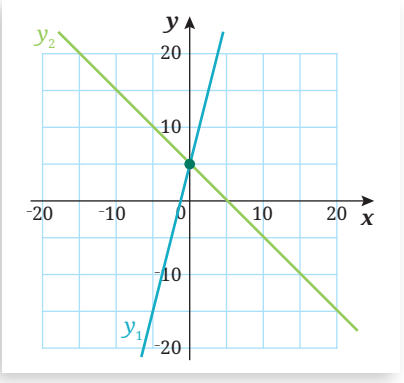

Le couple solution est (0, 0).

**b**

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $^-20$ | 2,6 | 3,2 |
| $^-25$ | 2,9 | 3,3 |
| $^-30$ | 3,2 | 3,4 |
| $^-35$ | 3,5 | 3,5 |
| $^-40$ | 3,8 | 3,6 |

Le couple solution est $(^-35\,;\,3{,}5)$.

**c**



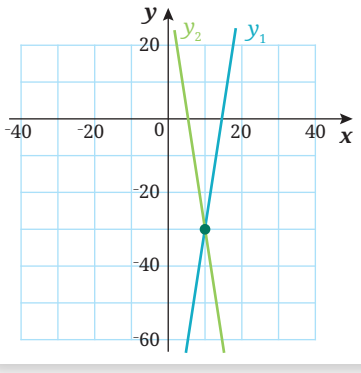

Le couple solution est (0, 5).

**d**

| $x$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 |
| 2 | 18 | 18 |
| 1 | 30 | 27 |
| 0 | 42 | 36 |
| $^-1$ | 54 | 45 |

Le couple solution est (2, 18).

**e**




Le couple solution est $(10, ^-30)$.

**f**

| $x$ | $6\frac{1}{2}$ | 7 | $7\frac{1}{2}$ | 8 | $8\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $y_2$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{^-1}{9}$ | $\frac{^-4}{9}$ | $\frac{^-7}{9}$ | $\frac{^-10}{9}$ |

Le couple solution est $\left(6\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**2.** Écrivez les systèmes d'équations suivants sous la forme $y = ax_1 + b_1$ et $y = ax_2 + b_2$, c'est-à-dire en isolant la variable $y$ dans les deux équations.

**a** $4x + y = 3$ et $^-2x + 2y = 8$ $y = {}^-4x + 3$ et $y = x + 4$

**b** $^-5x - y = 2$ et $^-10x + 5y = {}^-25$ $y = {}^-5x - 2$ et $y = 2x - 5$

★★**3.** Pour la situation suivante :

**a** identifiez les variables $x$ et $y$ ;

**b** traduisez le texte sous la forme d'un système d'équations ;

**c** résolvez le système d'équations en trouvant le couple solution ;

**d** interprétez la solution.

Marie-Hélène reçoit un salaire de 125 $ par semaine plus 5 $ par article qu'elle vend. Karelle touche un salaire de 110 $ par semaine plus 10 $ par article qu'elle vend. Combien d'articles doivent vendre ces deux employées pour recevoir le même salaire au cours d'une semaine ?

**1** Identification des variables
$x$ : nombre d'articles vendus
$y_1$ : salaire hebdomadaire de Marie-Hélène ($)
$y_2$ : salaire hebdomadaire de Karelle ($)

**2** Formulation des équations
Salaire de Marie-Hélène : $y_1 = 5x + 125$
Salaire de Karelle : $y_2 = 10x + 110$

**3** Expression d'égalité
$y_1 = y_2$
$5x + 125 = 10x + 110$

**4** Valeur de $x$
$^-5x = {}^-15$
$x = 3$

**5** Valeur de $y$
$y = 5x + 125$
$y = 5(3) + 125$
$y = 140$
(3, 140)
Le couple solution est (3, 140).

**RÉPONSE** Si elles vendent trois articles au cours d'une semaine, Marie-Hélène et Karelle recevront toutes les deux 140 $.

# 4.1 L'INTERPRÉTATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

## Interpréter un système d'équations

Un système d'équations est formé d'au moins deux équations.

Le résoudre consiste à trouver le ou les couples $(x, y)$ qui valident toutes les équations du système.

Ces couples s'appellent des « solutions du système d'équations » et ils correspondent aux endroits où les droites se rencontrent.

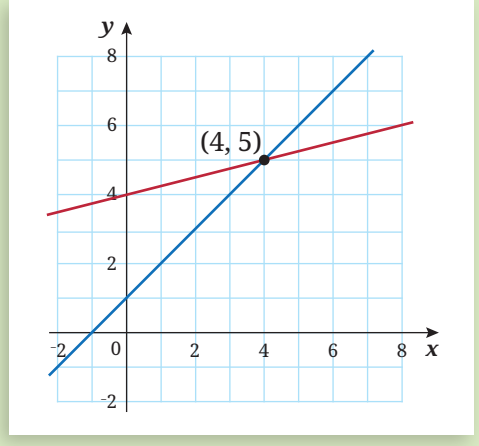
Il existe différentes façons de résoudre un système d'équations, en voici deux.

**EXEMPLE 1**

$$y = x + 1 \text{ et } y = 0{,}25x + 4$$

À l'aide de la représentation graphique :

- tracer les droites des deux équations dans le même plan cartésien ;
- déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection des deux droites.




La solution du système d'équations est (4, 5).

**EXEMPLE 2**

$$y_1 = 3x + 8 \text{ et } y_2 = \frac{x}{2} + 15{,}5$$

À l'aide d'une table de valeurs :

- trouver des couples représentant chaque équation ;
- déterminer la solution qui correspond au point commun des deux équations.

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 8 | 11 | 14 | 17 |
| $y_2$ | 15,5 | 16 | 16,5 | 17 |

Puisqu'à $x = 3$, $y$ vaut 17 dans les deux équations, la solution de ce système est (3, 17).

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Il est aussi possible de valider la solution d'un système d'équations en remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées du couple solution dans chacune des équations.

**EXEMPLE**

**Trouver le couple qui résout le système d'équations suivant.**

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= 0{,}25x + 4 \end{aligned}$$

Par exemple, le couple (1, 2) n'est pas une solution de ce système d'équations puisqu'en remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de ce point dans les deux équations, on arrive à une égalité dans une seule des deux équations.

| $y = x + 1$ | $y = 0{,}25x + 4$ |
|---|---|
| $2 = 1 + 1$ | $2 = 0{,}25(1) + 4$ |
| $2 = 2$ | $2 = 0{,}25 + 4$ |
| | $2 \neq 4{,}25$ |

Le couple (4, 5) est une solution de ce système d'équations puisqu'en remplaçant $x$ et $y$ par les coordonnées de ce point dans les deux équations, on arrive à une égalité dans les deux équations.

| $y = x + 1$ | $y = 0{,}25x + 4$ |
|---|---|
| $5 = 4 + 1$ | $5 = 0{,}25(4) + 4$ |
| $5 = 5$ | $5 = 1 + 4$ |
| | $5 = 5$ |

## EXERCICES

★**1.** Résolvez les systèmes d'équations ci-dessous.

**a**

| $x$ | 3 | $^-3$ | $^-9$ | $^-15$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 5 | 10 | 15 |

| $x$ | 3 | 1 | $^-1$ | $^-3$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 |

$(^-3, 5)$

**b**

| $x$ | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $^-5{,}2$ | $^-5{,}3$ | $^-5{,}4$ | $^-5{,}5$ |

| $x$ | 100 | 200 | 300 | 400 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $^-5{,}5$ | $^-9{,}5$ | $^-13{,}5$ | $^-17{,}5$ |

$(100 ; ^-5{,}5)$

**c**

| $x$ | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $^-10$ | $^-8$ | $^-6$ | $^-4$ |

| $x$ | 20 | $^-20$ | $^-60$ | $^-100$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $^-10$ | $^-20$ | $^-30$ | $^-40$ |

$(20 ; ^-10)$

**d**

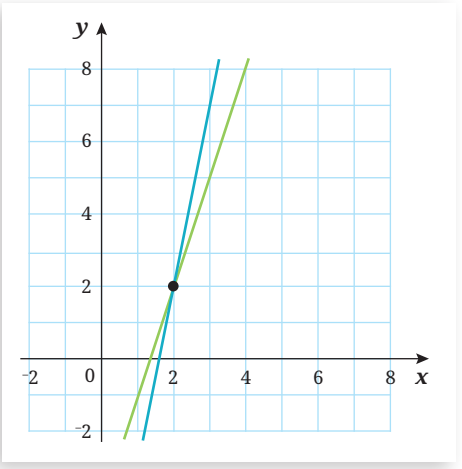
| $x$ | $^-2{,}3$ | $^-2{,}5$ | $^-2{,}7$ | $^-2{,}9$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,05 | 0,10 | 0,15 | 0,20 |

| $x$ | $^-4{,}7$ | $^-3{,}7$ | $^-2{,}7$ | $^-1{,}7$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $^-5{,}85$ | $^-2{,}85$ | 0,15 | 3,15 |

$(^-2{,}7 ; 0{,}15)$

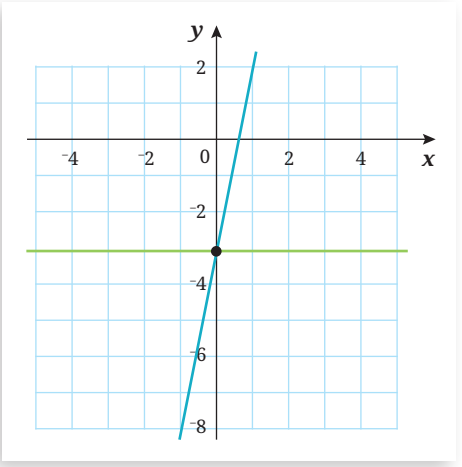
★**2.** Déterminez la solution des systèmes d'équations suivants.

**a**



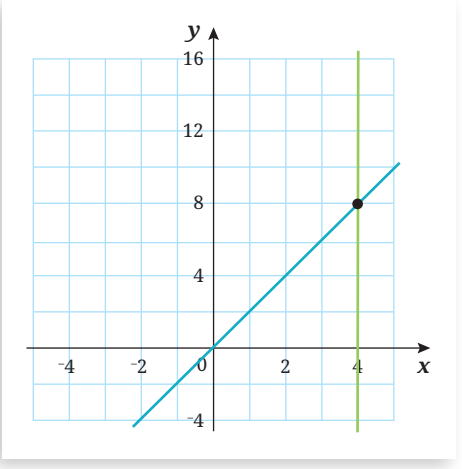

(2, 2)

**b**



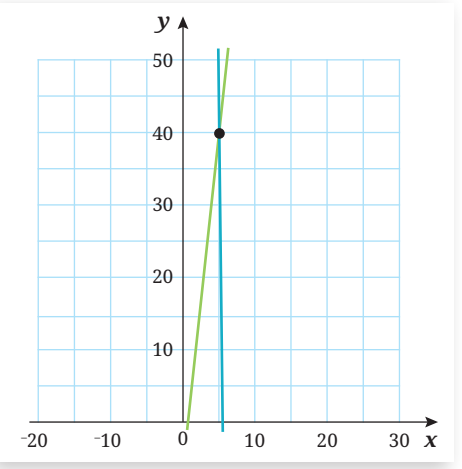

(0, -3)

**c**



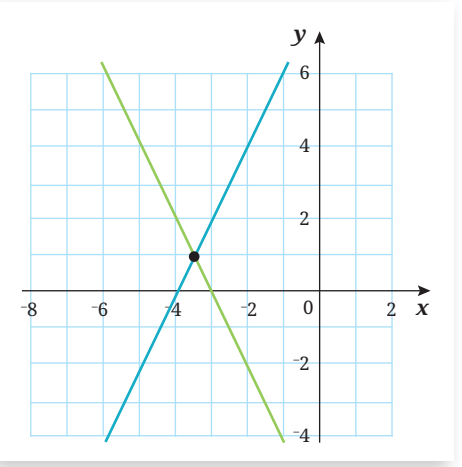

(4, 8)

**d**



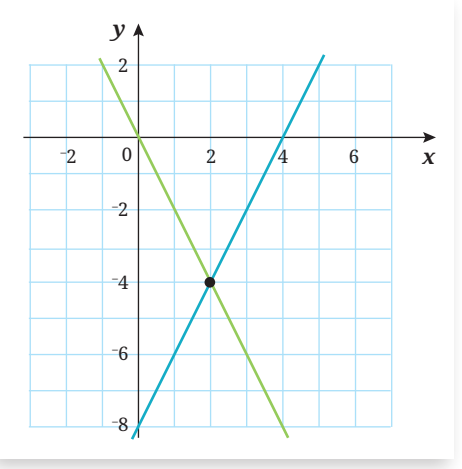

(5, 40)

**e**




(-3,5 ; 1)

**f**




(2, -4)

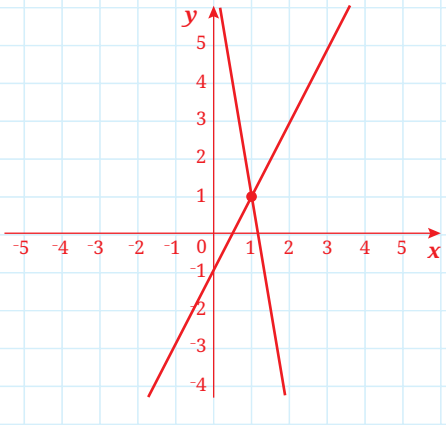
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

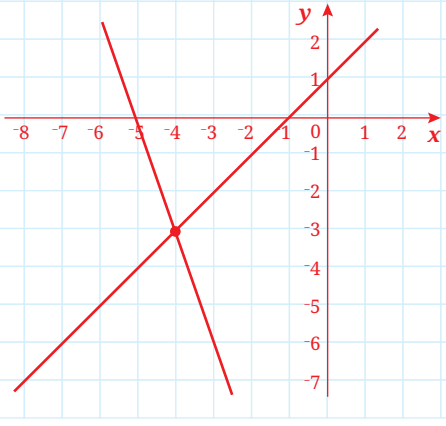
★★**3.** Résolvez les systèmes d'équations suivants en les représentant graphiquement.

**a** $y = 2x - 1$ et $y = {}^{-}5x + 6$




**RÉPONSE** Le couple solution est (1, 1).

**b** $y = x + 1$ et $y = {}^{-}3x - 15$




**RÉPONSE** Le couple solution est $({}^{-}4, {}^{-}3)$.

★★**4.** Déterminez si le couple $(2, {}^{-}1)$ est une solution de chacun des systèmes d'équations suivants.

**a** $y = 2x - 1$ et $y = {}^{-}x + 2$

**1** $y = 2x - 1$
$^{-}1 = 2(2) - 1$
$^{-}1 \neq 3$

**2** $y = {}^{-}x + 2$
$^{-}1 = {}^{-}(2) + 2$
$^{-}1 \neq 0$

**RÉPONSE** Non, il n'est pas une solution.

**b** $y = 3{,}8x - 8{,}6$ et $y = 6x - 13$

**1** $y = 3{,}8x - 8{,}6$
$^{-}1 = 3{,}8(2) - 8{,}6$
$^{-}1 = {}^{-}1$

**2** $y = 6x - 13$
$^{-}1 = 6(2) - 13$
$^{-}1 = {}^{-}1$

**RÉPONSE** Oui, il est une solution.

# 4.2 LA MÉTHODE DE COMPARAISON

## Utiliser la méthode de comparaison pour résoudre un système d'équations

Il existe également des méthodes algébriques qui servent à résoudre des systèmes d'équations. Non seulement ces méthodes sont plus précises, mais elles permettent de trouver la ou les solutions si les coordonnées ne sont pas des nombres entiers.

La **méthode de comparaison** est une méthode algébrique qui consiste :
- à poser une égalité entre les deux valeurs de $y$ afin de trouver la valeur de $x$ ;
- à trouver la valeur de $y$ qui est associée à la valeur de $x$.

**EXEMPLE**

**Résoudre le système d'équations suivant avec la méthode de comparaison.**

$$y = -3x + 9$$
$$y - \frac{x}{\square} - \frac{1}{4} = 0$$

| | |
|---|---|
| **1.** Isoler $y$ dans les deux équations. | **1.** $y = -3x + 9$ **2.** $y = \frac{\square}{2} + \frac{1}{4}$ |
| **2.** Comparer les valeurs de $y$ en posant une égalité entre ces valeurs. | $y = y$<br>$-3x + 9 = \frac{\square}{2} + \frac{1}{4}$ |
| **3.** Résoudre l'équation. | $-3x + 9 = \frac{\square}{2} + \frac{1}{4}$<br>$-3x + 3x + 9 - \frac{1}{4} = \frac{\square}{2} + 3x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$<br>$\frac{35}{4} = \frac{7\square}{2}$<br>$\frac{35}{2} = 7x$<br>$\frac{5}{2} = x$ |
| **4.** Trouver la valeur de $y$ en remplaçant $x$ par sa valeur dans l'une des deux équations de départ afin d'obtenir le couple solution. | $y = -3x + 9$<br>$y = -3\left(\frac{5}{2}\right) + 9$<br>$y = \frac{-15}{2} + 9$<br>$y = \frac{3}{2}$<br>$\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ |
| **5.** Valider la réponse en remplaçant $x$ et $y$ par leur valeur respective dans les deux équations de départ afin d'obtenir une égalité. | **1.** $y = -3x + 9$<br>$\frac{3}{2} = -3\left(\frac{5}{2}\right) + 9$<br>$\frac{3}{2} = \frac{-15}{2} + 9$<br>$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$<br>**2.** $y - \frac{\square}{2} - \frac{1}{4} = 0$<br>$\frac{3}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{1}{4} = 0$<br>$\frac{6}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 0$<br>$0 = 0$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

## EXERCICES

★★ Déterminez algébriquement la solution de chaque système d'équations.

**a** $y = 3x + 2$ et $y = -4x + 5$

**1** $y = y$

$3x + 2 = -4x + 5$

**2** $3x + 2 = -4x + 5$

$7x + 2 = 5$

$7x = 3$

$x = \frac{3}{7}$

**3** $y = 3x + 2$

$y = 3\left(\frac{3}{7}\right) + 2$

$y = \frac{9}{7} + 2$

$y = \frac{23}{7}$

$\left(\frac{3}{7}, \frac{23}{7}\right)$

**4** $y = 3x + 2$

$\frac{23}{7} = 3\left(\frac{3}{7}\right) + 2$

$\frac{23}{7} = \frac{9}{7} + 2$

$\frac{23}{7} = \frac{23}{7}$

$y = -4x + 5$

$\frac{23}{7} = -4\left(\frac{3}{7}\right) + 5$

$\frac{23}{7} = \frac{-12}{7} + 5$

$\frac{23}{7} = \frac{23}{7}$

**RÉPONSE** $\left(\frac{3}{7}, \frac{23}{7}\right)$

**b** $y = 5x + 7$ et $0 = y + 3x - 8$

**1** $0 = y + 3x - 8$

$y = -3x + 8$

**2** $y = y$

$5x + 7 = -3x + 8$

**3** $5x + 7 = -3x + 8$

$8x + 7 = 8$

$8x = 1$

$x = \frac{1}{8}$

**4** $y = 5x + 7$

$y = 5\left(\frac{1}{8}\right) + 7$

$y = \frac{5}{8} + 7$

$y = \frac{61}{8}$

$\left(\frac{1}{8}, \frac{61}{8}\right)$

**5** $y = 5x + 7$

$\frac{61}{8} = 5\left(\frac{1}{8}\right) + 7$

$\frac{61}{8} = \frac{5}{8} + 7$

$\frac{61}{8} = \frac{61}{8}$

$0 = y + 3x - 8$

$0 = \left(\frac{61}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) - 8$

$0 = \frac{-61}{8} + \frac{3}{8} + \frac{64}{8}$

$0 = 0$

**RÉPONSE** $\left(\frac{1}{8}, \frac{61}{8}\right)$

**c** $y = {}^{-}60x + 55$ et $y = 75x - 20$

**1**
$y = y$
${}^{-}60x + 55 = 75x - 20$

**2**
${}^{-}60x + 55 = 75x - 20$
${}^{-}135x + 55 = {}^{-}20$
${}^{-}135x = {}^{-}75$
$x = \frac{5}{9}$ ou $0,\overline{5}$

**3**
$y = {}^{-}60x + 55$
$y = {}^{-}60(0,\overline{5}) + 55$
$y = {}^{-}33,\overline{3} + 55$
$y = 21,\overline{6}$
$(0,\overline{5}\,;\, 21,\overline{6})$

**4**
$y = {}^{-}60x + 55$
$21,67 = {}^{-}60(0,\overline{5}) + 55$
$21,67 = {}^{-}33,\overline{3} + 55$
$21,67 = 21,67$

$y = 75x - 20$
$21,67 = 75(0,\overline{5}) - 20$
$21,67 = 41,67 - 20$
$21,67 = 21,67$

**RÉPONSE** $(0,\overline{5}\,;\, 21,67)$

**d** $y = 3,8x + 2,9$ et $0 = 2y + 6,6x - 5$

**1**
$0 = 2y + 6,6x - 5$
$y = {}^{-}3,3x + 2,5$

**2**
$y = y$
$3,8x + 2,9 = {}^{-}3,3x + 2,5$

**3**
$3,8x + 2,9 = {}^{-}3,3x + 2,5$
$7,1x + 2,9 = 2,5$
$7,1x = {}^{-}0,4$
$x = \frac{{}^{-}0,4}{7,1}$ ou ${}^{-}0,06$

**4**
$y = 3,8x + 2,9$
$y = 3,8({}^{-}0,06) + 2,9$
$y = {}^{-}0,23 + 2,9$
$y = 2,69$
$({}^{-}0,06\,;\, 2,67)$

**5**
$y = 3,8x + 2,9$
$2,67 = 3,8({}^{-}0,06) + 2,9$
$2,67 = {}^{-}0,23 + 2,9$
$2,67 = 2,67$

$0 = 2y + 6,6x - 5$
$0 = 2(2,67) + 6,6({}^{-}0,06) - 5$
$0 = 5,34 - 0,39 - 5$
$0 \approx {}^{-}0,05$

**RÉPONSE** $({}^{-}0,06\,;\, 2,67)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# 4.3 LA MÉTHODE DE SUBSTITUTION

## Utiliser la méthode de substitution pour résoudre un système d'équations

La **méthode de substitution** est utile pour résoudre un système d'équations. Pour l'utiliser, il faut isoler une variable dans l'une des deux équations.

**EXEMPLE**

**Résoudre le système d'équations suivant avec la méthode de substitution.**

$$0 = 2x - y + 1$$
$$x - y = 15$$

| | |
|---|---|
| **1.** Isoler une variable dans l'une des deux équations. | $0 = 2x - y + 1$<br>$y = 2x + 1$ |
| **2.** Remplacer la variable par sa valeur dans l'autre équation. | $x - y = 15$<br>$x - (2x + 1) = 15$ |
| **3.** Résoudre l'équation. | $x - 2x - 1 = 15$<br>$^{-}x - 1 = 15$<br>$x = ^{-}16$ |
| **4.** Remplacer dans l'une des équations de départ la valeur obtenue lors de la résolution pour déterminer la valeur de l'autre variable et obtenir le couple solution. | $y = 2x + 1$<br>$y = 2(^{-}16) + 1$<br>$y = ^{-}31$<br>Le couple solution est $(^{-}16, ^{-}31)$. |
| **5.** Valider la solution en remplaçant $x$ et $y$ dans l'autre équation de départ par les valeurs obtenues. | $x - y = 15$<br>$^{-}16 - ^{-}31 = 15$<br>$15 = 15$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## EXERCICES

★**1.** Isolez la variable $y$ dans les équations suivantes.

**a** $y + 2x + 1 = 0$

$y + 2x + 1 = 0$
$y + 1 = ^{-}2x$
$y = ^{-}2x - 1$

**RÉPONSE** $y = ^{-}2x - 1$

**b** $^{-}5x + 5y = ^{-}10$

$^{-}5x + 5y = ^{-}10$
$5y = 5x - 10$
$y = \frac{5\square}{5} - \frac{10}{5}$
$y = x - 2$

**RÉPONSE** $y = x - 2$

**★2.** Effectuez les manipulations algébriques nécessaires pour traduire les équations suivantes sous la forme $y = ax + b$.

**a** $y + 3x + 6 = 0$

$$y + 3x + 6 = 0$$
$$y + 6 = -3x$$
$$y = -3x - 6$$

**RÉPONSE** $y = -3x - 6$

**b** $4y - x = 2$

$$4y - x = 2$$
$$4y = x + 2$$
$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

**RÉPONSE** $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$

**c** $6x + 3y = 12$

$$6x + 3y = 12$$
$$3y = -6x + 12$$
$$y = -2x + 4$$

**RÉPONSE** $y = -2x + 4$

**d** $-4{,}4y + 2{,}8x + 6{,}6 = 0$

$$-4{,}4y + 2{,}8x + 6{,}6 = 0$$
$$-4{,}4y + 6{,}6 = -2{,}8x$$
$$-4{,}4y = -2{,}8x - 6{,}6$$
$$y = 0{,}64x + 1{,}5$$

**RÉPONSE** $y = 0{,}64x + 1{,}5$

**★3.** Déterminez si le couple $(-1, 7)$ est une solution du système d'équations suivant.

$$y = -5x + 2 \text{ et } 10x + 5y = 25$$

**1** Remplacement de $y$ par sa valeur dans l'une des équations

$$10x + 5y = 25$$
$$10x + 5(-5x + 2) = 25$$

**2** Valeur de $x$

$$10x + 5(-5x + 2) = 25$$
$$10x - 25x + 10 = 25$$
$$-15x + 10 = 25$$
$$-15x = 15$$
$$x = -1$$

**3** Valeur de $y$

$$y = -5x + 2$$
$$y = -5(-1) + 2$$
$$y = 7$$
$$(-1, 7)$$

**4** Validation du couple solution

$$10x + 5y = 25$$
$$10(-1) + 5(7) = 25$$
$$-10 + 35 = 25$$
$$25 = 25$$

**RÉPONSE** Oui, le couple $(-1, 7)$ est une solution du système d'équations.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**4.** Résolvez chaque système d'équations en utilisant la méthode de substitution.

**a** $0 = -y + x + 1$ et $-2x + y = -4$

**1** $0 = -y + x + 1$
$y = x + 1$

**2** $-2x + y = -4$
$-2x + (x + 1) = -4$

**3** $-2x + (x + 1) = -4$
$-2x + x + 1 = -4$
$-x + 1 = -4$
$-x = -5$
$x = 5$

**4** $y = x + 1$
$y = 5 + 1$
$y = 6$
$(5, 6)$

**5** $-2x + y = -4$
$-2(5) + 6 = -4$
$-10 + 6 = -4$
$-4 = -4$

**RÉPONSE** Le couple solution est (5, 6).

**b** $y = \frac{x}{3} + 3$ et $\frac{-x}{4} + y = 6$

**1** $y = \frac{x}{3} + 3$

**2** $\frac{-x}{4} + y = 6$
$\frac{-x}{4} + \left(\frac{x}{3} + 3\right) = 6$

**3** $\frac{-x}{4} + \frac{x}{3} + 3 = 6$
$\frac{-3x + 4x}{12} + 3 = 6$
$\frac{x}{12} + 3 = 6$
$\frac{x}{12} = 6 - 3$
$\frac{x}{12} = 3$
$x = 36$

**4** $y = \frac{x}{3} + 3$
$y = \frac{36}{3} + 3$
$y = 12 + 3$
$y = 15$
$(36, 15)$

**5** $\frac{-x}{4} + y = 6$
$\frac{-36}{4} + 15 = 6$
$-9 + 15 = 6$
$6 = 6$

**RÉPONSE** Le couple solution est (36, 15).

# 4.4 LA MÉTHODE DE RÉDUCTION

## Utiliser la méthode de réduction pour résoudre un système d'équations

La **méthode de réduction** est également utile pour résoudre un système d'équations. Pour l'utiliser, il faut que le système d'équations se trouve sous la forme suivante.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

**EXEMPLE**

**Résoudre le système d'équations suivant avec la méthode de réduction.**

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ 3y &= {}^-1 - x \end{aligned}$$

| | |
|---|---|
| **1.** Effectuer les manipulations nécessaires pour avoir les deux variables $x$ et $y$ du même côté de l'égalité et pour avoir le terme constant de l'autre côté de l'égalité. | $3y = {}^-1 - x$<br>$3y + x = {}^-1$ |
| **2.** Au moyen de la multiplication ou de la division, constituer un système d'équations dans lequel les coefficients d'au moins une des deux variables sont égaux. | Multiplication de la seconde équation par 2<br>$3y + x = {}^-1$<br>$2x + 6y = {}^-2$ $\times 2$ |
| **3.** Soustraire les deux équations pour éliminer l'une des deux variables.<br>**Note :** Il faut soustraire de la première équation tous les termes de la seconde équation en respectant bien les termes semblables. | $2x + 2y = 6$<br>$-(2x + 6y = {}^-2)$<br>$^-4y = 8$ |
| **4.** Résoudre l'équation. | $^-4y = 8$<br>$y = {}^-2$ |
| **5.** Insérer la valeur obtenue lors de la résolution dans l'une des équations de départ pour déterminer la valeur de l'autre variable et obtenir le couple solution. | $2x + 2y = 6$<br>$2x + 2({}^-2) = 6$<br>$2x - 4 = 6$<br>$2x = 10$<br>$x = 5$<br>Le couple solution est $(5, {}^-2)$. |
| **6.** Valider la solution en remplaçant $x$ et $y$ dans l'autre équation de départ par les valeurs obtenues. | $x + 3y = {}^-1$<br>$5 + 3({}^-2) = {}^-1$<br>$5 - 6 = {}^-1$<br>$^-1 = {}^-1$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** Effectuez les multiplications nécessaires, celles mentionnées à l'étape 2 de l'encadré théorique précédent, pour obtenir deux équations permettant d'utiliser la méthode de réduction.

**a** $2x + 4y = -1$ et $6x - y = 10$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la première équation est multipliée par 3.
$6x + 12y = -3$

**RÉPONSE** $6x + 12y = -3$ et $6x - y = 10$

**b** $x + y = -20$ et $2x - 3y = 60$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la première équation est multipliée par 2.
$2x + 2y = -40$

**RÉPONSE** $2x - 3y = 60$ et $2x + 2y = -40$

**c** $2x + 5y = 0$ et $x - 3y = -4$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la première équation est divisée par 2.
$x + 2{,}5y = 0$

**RÉPONSE** $x - 3y = -4$ et $x + 2{,}5y = 0$

**d** $22x + 40y = 14$ et $44x - 4y = 8$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la seconde équation est divisée par 2.
$22x + 40y = 14$

**RÉPONSE** $22x + 40y = 14$ et $22x + -2y = 4$

**e** $-0{,}8x + 8{,}6y = -7{,}2$ et $1{,}4x - 4{,}3y = 9{,}3$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la première équation est divisée par $-2$.
$0{,}4x - 4{,}3y = 3{,}6$

**RÉPONSE** $1{,}4x - 4{,}3y = 9{,}3$ et $0{,}4x - 4{,}3y = 3{,}6$

**f** $103x + 406y = 1006$ et $65x + 812y = 2088$

Plusieurs réponses possibles.
Ici, la seconde équation est divisée par 2.
$103x + 406y = 1006$

**RÉPONSE** $103x + 406y = 1006$ et $32{,}5x + 406y = 1044$

★★**2.** Résolvez les systèmes d'équations suivants à l'aide de la méthode de réduction.

**a** $3y + x = 4$ et $y = {}^{-}4 - x$

**1** $y = {}^{-}4 - x$
$y + x = {}^{-}4$

**2** Multiplication par 3 de la seconde équation
$y + x = {}^{-}4$
$3y + 3x = {}^{-}12$ $\times 3$

**3**
$3y + x = 4$
$-(3y + 3x = {}^{-}12)$
$-2x = 16$

**4** $-2x = 16$
$x = {}^{-}8$

**5**
$y + x = {}^{-}4$
$y + ({}^{-}8) = {}^{-}4$
$y = 4$
$({}^{-}8, 4)$

**6**
$3y + x = 4$
$3(0) + ({}^{-}4) = {}^{-}4$
$-4 = -4$

**RÉPONSE** Le couple solution est $({}^{-}8, 4)$.

**b** $-22{,}5x + 48{,}6y = 54{,}9$ et $-45x + 12{,}4y = 73{,}8$

**1** $-22{,}5x + 48{,}6y = 54{,}9$ et
$-45x + 12{,}4y = 73{,}8$

**2** Multiplication par 2 de la première équation
$-22{,}5x + 48{,}6y = 54{,}9$
$-45x + 97{,}2y = 109{,}8$ $\times 2$

**3**
$-45x + 97{,}2y = 109{,}8$
$-(-45x + 12{,}4y = 73{,}8)$
$84{,}8y = 36$

**4** $84{,}8y = 36$
$y = 0{,}42$

**5**
$-22{,}5x + 48{,}6y = 54{,}9$
$-22{,}5x + 48{,}6(0{,}42) = 54{,}9$
$-22{,}5x + 20{,}41 = 54{,}9$
$-22{,}5x = 34{,}49$
$x = {}^{-}1{,}53$
$({}^{-}1{,}53\,;\, 0{,}42)$

**6**
$-45x + 12{,}4y = 73{,}8$
$-45({}^{-}1{,}53) + 12{,}4(0{,}42) = 73{,}8$
$68{,}85 + 5{,}21 = 73{,}8$
$74{,}06 \approx 73{,}8$

**RÉPONSE** Le couple solution est $({}^{-}1{,}53\,;\, 0{,}42)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Quel est le couple solution du système d'équations suivant ?

$$5{,}8x + 2{,}6y = 3{,}4 \text{ et } {}^{-}17{,}4x + 4{,}1y = 8{,}5$$

**1** $5{,}8x + 2{,}6y = 3{,}4$ et
$^{-}17{,}4x + 4{,}1y = 8{,}5$

**2** Multiplication par $^{-}3$ de la première équation

$$\begin{aligned} 5{,}8x + 2{,}6y &= 3{,}4 \\ {}^{-}17{,}4x + {}^{-}7{,}8y &= {}^{-}10{,}2 \end{aligned} \quad \times {}^{-}3$$

**3** Soustraction des deux équations

$$\begin{aligned} {}^{-}17{,}4x - 7{,}8y &= {}^{-}10{,}2 \\ -\,({}^{-}17{,}4x + 4{,}1y &= 8{,}5) \\ \hline {}^{-}11{,}9y &= {}^{-}18{,}7 \end{aligned}$$

**4** Valeur de $y$

$$\begin{aligned} {}^{-}11{,}9y &= {}^{-}18{,}7 \\ y &= 1{,}57 \end{aligned}$$

**5** Valeur de $x$

$$\begin{aligned} 5{,}8x + 2{,}6y &= 3{,}4 \\ 5{,}8x + 2{,}6(1{,}57) &= 3{,}4 \\ 5{,}8x + 4{,}08 &= 3{,}4 \\ 5{,}8x &= {}^{-}0{,}68 \\ x &= {}^{-}0{,}12 \end{aligned}$$

$({}^{-}0{,}12\,;\,1{,}57)$

**6** Validation du couple solution

$$\begin{aligned} {}^{-}17{,}4x + 4{,}1y &= 8{,}5 \\ {}^{-}17{,}4({}^{-}0{,}12) + 4{,}1(1{,}57) &= 8{,}5 \\ 2{,}09 + 6{,}44 &= 8{,}5 \\ 8{,}53 &\approx 8{,}5 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Le couple solution est $({}^{-}0{,}12\,;\,1{,}57)$.

★★**4.** À l'aide de la méthode de réduction, résolvez le système d'équations ci-dessous.

$$y + 5x = 20 \text{ et } 5y = {}^{-}x + 4$$

**1** $y + 5x = 20$
$5y + x = 4$

**2** Multiplication par 5 de la première équation

$$\begin{aligned} y + 5x &= 20 \\ 5y + 25x &= 100 \end{aligned} \quad \times 5$$

**3**

$$\begin{aligned} 5y + 25x &= 100 \\ -\,(5y + x &= 4) \\ \hline 24x &= 96 \\ x &= \frac{96}{24} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

**4**

$$\begin{aligned} y + 5x &= 20 \\ y + 5(4) &= 20 \\ y + 20 &= 20 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

**5** (4, 0)

**6**

$$\begin{aligned} 5y + x &= 4 \\ 5(0) + (4) &= 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Le couple solution est (4, 0).

## Résoudre des problèmes à l'aide de la méthode de son choix

Il est possible que les équations du système ne soient pas données directement. Il faut alors traduire le texte sous forme d'équations avant de résoudre le problème avec la démarche expliquée précédemment.

**EXEMPLE**

**Juliette gagne 12,50 $ l'heure comme commis d'épicerie. De son côté, Yoan gagne 10 $ l'heure comme serveur, mais il reçoit en plus 160 $ de pourboire par semaine. Combien d'heures doivent-ils effectuer dans leur semaine pour gagner le même salaire et quel est ce salaire ?**

| | |
|---|---|
| **1.** Définir les variables. | $x$ : nombre d'heures de travail<br>$y$ : salaire ($) |
| **2.** Traduire le texte sous forme d'équations. | Juliette : $y = 12{,}50x$<br>Yoan : $y = 10x + 160$ |
| **3.** Résoudre le système d'équations avec la méthode de son choix (comparaison, substitution ou réduction). | $12{,}50x = 10x + 160$<br>$12{,}50x - 10x = 10x - 10x + 160$<br>$2{,}5x = 160$<br>$\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{160}{2{,}5}$<br>$x = 64$ h<br>$y = 12{,}50x$<br>$y = 12{,}50(64)$<br>$y = 800$ $$<br>(64, 800) |
| **4.** Répondre à la question par une phrase complète. | Juliette et Yoan doivent tous les deux effectuer 64 heures de travail dans la semaine pour gagner 800 $. |

## EXERCICES

★**1.** Indiquez quelle méthode de résolution serait la plus appropriée à chacun des systèmes d'équations suivants.

**a** $y = 3x + 1$ et $y = -2x + 8$ — La méthode de comparaison.

**b** $-4y + 2x = 7$ et $-8y - 6x = -5$ — La méthode de réduction.

**c** $2y = x - 6$ et $y = 4x$ — La méthode de substitution.

**d** $-70x + 35y = -140$ et $-7x + 90y = -900$ — La méthode de réduction.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Un nombre est égal à 5 de plus que le double d'un autre nombre et est aussi égal à 4 de plus que le triple de cet autre nombre. Quels sont ces deux nombres ?

**1** Identification des variables
$x$ : premier nombre
$y$ : second nombre

**2** $y = 2x + 5$ et $y = 3x + 4$

**3** Méthode de comparaison
$y = y$
$2x + 5 = 3x + 4$
$-x + 5 = 4$
$-x = -1$
$x = 1$

**4** $y = 2x + 5$
$y = 2(1) + 5$
$y = 2 + 5$
$y = 7$
$(1, 7)$

**5** Validation
$y = 2x + 5$
$7 = 2(1) + 5$
$7 = 2 + 5$
$7 = 7$

$y = 3x + 4$
$7 = 3(1) + 4$
$7 = 3 + 4$
$7 = 7$

**RÉPONSE** Ces deux nombres sont 1 et 7.

★★**3.** Dans un sondage réalisé par une firme spécialisée en statistique, le nombre de répondantes et répondants âgés de 35 ans et plus correspond à 100 de plus que le nombre de celles et ceux âgés entre 18 et 34 ans. Au total, 280 personnes ont participé au sondage.

Traduisez cette situation par un système d'équations et résolvez-le à l'aide de la méthode de substitution en précisant le nombre de personnes de chaque catégorie.

**1** Identification des variables
$x$ : nombre de personnes âgées de 35 ans et plus
$y$ : nombre de personnes âgées entre 18 et 34 ans

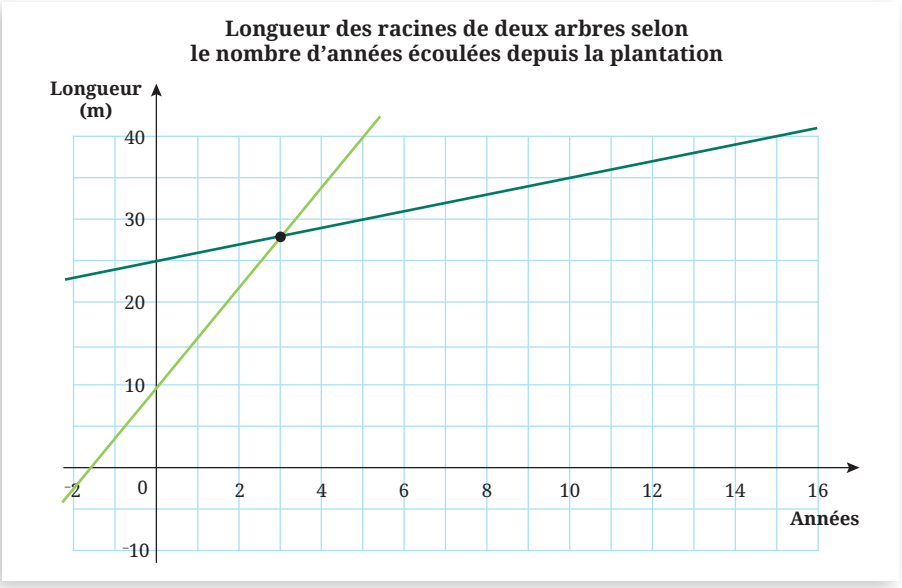
**2** Traduction de la situation par un système d'équations
$x = y + 100$
$x + y = 280$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution
$x + y = 280$
$(y + 100) + y = 280$
$2y + 100 = 280$
$2y = 180$
$y = 90$
$x = y + 100$
$x = 90 + 100$
$x = 190$
$(190, 90)$

**4** Validation
$x + y = 280$
$190 + 90 = 280$
$280 = 280$

**RÉPONSE** 190 personnes étaient âgées de 35 ans et plus et 90 autres étaient âgées entre 18 et 34 ans.

★★**4.** Le graphique suivant représente la longueur des racines de deux arbres selon le nombre d'années écoulées depuis la plantation de ceux-ci. Si les équations qui traduisent les deux courbes de croissance sont $y = x + 25$ et $y = 6x + 10$, à quel moment les racines de deux arbres étaient-elles de la même longueur et quelle était cette longueur ?




**1** Méthode de comparaison

$$y = y$$
$$x + 25 = 6x + 10$$
$$-5x + 25 = 10$$
$$-5x = -15$$
$$x = 3$$

**2** $y = x + 25$
$y = 3 + 25$
$y = 28$
$(3, 28)$

**3** Validation

$y = x + 25$
$25 = (3) + 25$
$28 = 28$

$y = 6x + 10$
$28 = 6(3) + 10$
$28 = 18 + 10$
$28 = 28$

**RÉPONSE** Les racines des deux arbres mesuraient 28 m trois ans après la plantation de ceux-ci.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **5.** Léonie a communiqué avec deux compagnies de nettoyage résidentiel pour connaître leurs tarifs. Voici les informations qu'elle a récoltées.

**Nettoyage Plus**
- 10 $ pour les frais de déplacement
- 25 $/h de nettoyage

**Nett-O-Max**
- 40 $ pour les frais de déplacement
- 15 $/h de nettoyage

**a** Identifiez les variables.

$x$ : nombre d'heures de nettoyage

$y$ : coût pour le nettoyage de la maison ($)

**b** Traduisez la situation par un système d'équations.

Nettoyage Plus : $y = 25x + 10$

Nett-O-Max : $y = 15x + 40$

**c** Quelle compagnie Léonie devrait-elle choisir ?

**1** $y = 25x + 10$
$y = 15x + 40$

**2** Méthode de comparaison
$y = y$
$25x + 10 = 15x + 40$
$10x + 10 = 40$
$10x = 30$
$x = 3$

**3** $y = 25x + 10$
$y = 25(3) + 10$
$y = 75 + 10$
$y = 85$
$(3, 85)$

**4** Validation

| | |
|---|---|
| $y = 25x + 10$ | $y = 15x + 40$ |
| $85 = 25(3) + 10$ | $85 = 15(3) + 40$ |
| $85 = 75 + 10$ | $85 = 45 + 40$ |
| $85 = 85$ | $85 = 85$ |

**RÉPONSE** Si le nettoyage de sa maison demande moins de trois heures, Léonie devrait choisir la compagnie Nettoyage Plus, mais s'il demande plus de trois heures, elle devrait opter pour Nett-O-Max.

★★**6.** Un premier nombre additionné au double d'un second nombre est égal à 54. Le second nombre réduit du tiers de la valeur du premier nombre donne 2. Quels sont ces deux nombres ?

**1** Identification des variables

$x$ : premier nombre

$y$ : second nombre

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$$x + 2y = 54$$

$$y - \frac{x}{3} = 2$$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de réduction

On multiplie par 2 la seconde équation.

$$y - \frac{x}{3} = 2 \quad \curvearrowright \times 2$$

$$2y - \frac{2x}{3} = 4$$

$$2y + x = 54$$

$$-\left(2y - \frac{2x}{3} = 4\right)$$

$$\frac{5x}{3} = 50$$

$$5x = 150$$

$$x = 30$$

$$x + 2y = 54$$

$$30 + 2y = 54$$

$$2y = 24$$

$$y = 12$$

(30, 12)

**4** Validation

$$y - \frac{x}{3} = 2$$

$$12 - \frac{30}{3} = 2$$

$$12 - 10 = 2$$

$$2 = 2$$

**RÉPONSE** Le premier nombre est 30 et le second est 12.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **7.** Le périmètre d'un pentagone régulier correspond au triple du périmètre d'un triangle équilatéral. Le double du périmètre du pentagone augmenté du tiers du périmètre du triangle est égal à 420 cm. Combien mesure chaque côté de ces deux figures planes ?

**1** Identification des variables

$x$ : mesure d'un côté d'un pentagone régulier (cm)

$y$ : mesure d'un côté d'un triangle équilatéral (cm)

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$5x = 9y$

$10x + y = 420$ ou $y = {}^{-}10x + 420$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution

$5x = 9y$

$5x = 9({}^{-}10x + 420)$

$5x = {}^{-}90x + 3780$

$95x = 3780$

$x \approx 39{,}79$

$y = {}^{-}10x + 420$

$y = {}^{-}10(39{,}79) + 420$

$y = {}^{-}397{,}9 + 420$

$y = 22{,}1$

$(39{,}79\,;\,22{,}1)$

**4** Validation

$5x = 9y$

$5(39{,}79) = 9(22{,}1)$

$198{,}95 \approx 198{,}9$

**RÉPONSE** Chaque côté du pentagone régulier mesure 39,79 cm et chaque côté du triangle équilatéral mesure 22,1 cm.

★★ **8.** Magalie adore faire des achats dans un magasin de produits en vrac exempts de taxe. Cette semaine, elle achète du bouillon de poulet en poudre qui coûte 0,02 $/g et du bouillon de bœuf en poudre qui coûte 0,03 $/g pour un total de 5,60 $. Comme elle préfère le bouillon de bœuf, elle s'en est procuré deux fois plus que du bouillon de poulet.

En utilisant la méthode de substitution, déterminez la quantité, en grammes, de bouillon de chaque sorte que Magalie a achetée au magasin de produits en vrac.

**1** Identification des variables

$x$ : quantité de bouillon de poulet en poudre (g)

$y$ : quantité de bouillon de bœuf en poudre (g)

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$0{,}02x + 0{,}03y = 5{,}60$

$y = 2x$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution

$$0{,}02x + 0{,}03y = 5{,}60$$
$$0{,}02x + 0{,}03(2x) = 5{,}60$$
$$0{,}02x + 0{,}06x = 5{,}60$$
$$0{,}08x = 5{,}60$$
$$x = 70$$

$y = 2x$

$y = 2(70)$

$y = 140$

$(70, 140)$

**4** Validation

$$0{,}02x + 0{,}03y = 5{,}60$$
$$0{,}02(70) + 0{,}03(140) = 5{,}60$$
$$1{,}4 + 4{,}2 = 5{,}60$$
$$5{,}6 = 5{,}60$$

**RÉPONSE** Magalie a acheté 70 g de bouillon de poulet et 140 g de bouillon de bœuf.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **9.** Le zoo sauvage de Saint-Félicien, situé au Saguenay–Lac-Saint-Jean, est une attraction locale qui attire nombre de visiteurs et visiteuses chaque année. L'an passé, 42 075 personnes ont parcouru le site. Le prix d'une entrée pour adulte est de 32,50 $ et celui d'une entrée pour enfant est de 18,75 $. Calculez le nombre d'adultes et d'enfants qui ont visité le zoo l'an dernier si les recettes compilées pour les entrées se sont élevées à 1 002 746,25 $.

**1** Identification des variables

$x$ : nombre d'adultes qui ont visité le zoo

$y$ : nombre d'enfants qui ont visité le zoo

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$x + y = 42\,075$ ou $y = 42\,075 - x$

$32{,}50x + 18{,}75y = 1\,002\,746{,}25$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution

$$32{,}50x + 18{,}75y = 1\,002\,746{,}25$$
$$32{,}50x + 18{,}75(42\,075 - x) = 1\,002\,746{,}25$$
$$32{,}50x + 788\,906{,}25 - 18{,}75x = 1\,002\,746{,}25$$
$$13{,}75x + 788\,906{,}25 = 1\,002\,746{,}25$$
$$13{,}75x = 213\,840$$
$$x = 15\,552 \text{ adultes}$$

$y = 42\,075 - x$

$y = 42\,075 - 15\,552$

$y = 26\,523$ enfants

(15 552, 26 523)

**4** Validation

$$32{,}50x + 18{,}75y = 1\,002\,746{,}25$$
$$32{,}50(15\,552) + 18{,}75(26\,523) = 1\,002\,746{,}25$$
$$505\,440 + 497\,306{,}25 = 1\,002\,746{,}25$$
$$1\,002\,746{,}25 = 1\,002\,746{,}25$$

**RÉPONSE** 15 552 adultes et 26 523 enfants ont visité le zoo l'an dernier.

**10.** Joseph a appelé deux compagnies d'électricité pour obtenir des renseignements concernant des travaux qu'il souhaite faire dans son chalet. Voici les règles qui indiquent le coût des travaux, dans lesquelles $M$ correspond à la somme totale à payer (\$) et $t$ au nombre de minutes nécessaires à la réalisation des travaux.

**Compagnie d'électricité 1**

$8M - 3t = 190$

**Compagnie d'électricité 2**

$4M - 2t = {}^{-}240$

Après combien de minutes la somme à débourser par Joseph serait-elle la même avec les deux compagnies d'électricité et quelle serait cette somme ?

**1** Identification des variables

$t$ : nombre de minutes nécessaires à la réalisation des travaux

$M$ : coût des travaux (\$)

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$8M - 3t = 190$

$4M - 2t = {}^{-}240$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de réduction

On multiplie par 2 la seconde équation.

$4M - 2t = {}^{-}240$

$(8M - 4t = {}^{-}480)$ $\times 2$

$$\begin{aligned} 8M - 3t &= 190 \\ -(8M - 4t &= {}^{-}480) \\ \hline t &= 670 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4M - 2t &= {}^{-}240 \\ 4M - 2(670) &= {}^{-}240 \\ 4M - 1340 &= {}^{-}240 \\ 4M &= 1100 \\ M &= 275 \end{aligned}$$

(670, 275)

**4** Validation

$$\begin{aligned} 8M - 3t &= 190 \\ 8(275) - 3(670) &= 190 \\ 2200 - 2010 &= 190 \\ 190 &= 190 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Pour des travaux d'une durée de 670 minutes, Joseph devrait débourser la somme de 275 \$ avec les deux compagnies.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **11.** Votre ami et vous aimeriez visiter le Guatemala. Vous avez 14 jours de vacances et vous disposez d'un budget de 2470 $ pour l'hébergement. Après de petites recherches, vous concluez que séjourner dans un hôtel quatre étoiles vous coûterait environ 260 $ par jour et que séjourner dans un appartement vous coûterait 65 $ par jour. Les deux options vous plaisent. Proposez un plan de vacances selon lequel vous dépenseriez tout votre budget d'hébergement, mais pas plus, et qui combinerait des nuitées à l'hôtel et dans un appartement.

**1** Identification des variables

$x$ : nombre de jours passés à l'hôtel

$y$ : nombre de jours passés dans un appartement

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 260x + 65y &= 2470 \end{aligned}$$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de réduction

Nombre de nuitées en appartement

On multiplie la première équation par 260.

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ 260x + 260y &= 3640 \end{aligned} \quad \times 260$$

$$\begin{aligned} 260x + 260y &= 3640 \\ -(260x + 65y &= 2470) \\ \hline 195y &= 1170 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Nombre de nuitées à l'hôtel

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + 6 &= 14 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

(8, 6)

**4** Validation

$$\begin{aligned} 260(8) + 65(6) &= 2470 \\ 2080 + 390 &= 2470 \\ 2470 &= 2470 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Afin de dépenser tout notre budget, il nous faudrait passer 8 nuitées à l'hôtel et 6 nuitées dans un appartement.

# 4.5 LE NOMBRE DE SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

## Résoudre un système d'équations

Pour la **résolution d'un système d'équations**, il est important de connaître le nombre de solutions possibles. Selon le contexte, trois situations peuvent se présenter :

- aucune solution ;
- une infinité de solutions ;
- une seule solution.

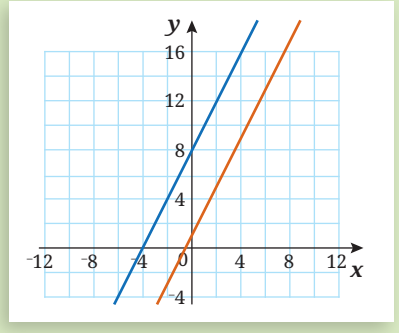
Un système d'équations formé de deux équations associées à des droites parallèles distinctes (qui ont les mêmes pentes, mais des ordonnées à l'origine différentes) n'admet **aucune solution**. On écrit alors que sa solution est l'ensemble vide (∅). Plus précisément, sa résolution conduit à une inégalité.

**Note :** Si on s'en rend compte dès le départ, il n'est pas nécessaire de résoudre le système d'équations.

**EXEMPLE 1**

$$y = 2x + 1$$
$$y - 2x = 8$$

| | |
|---|---|
| Résoudre le système d'équations. | Méthode de substitution<br>$y - 2x = 8$<br>$(2x + 1) - 2x = 8$<br>$1 \neq 8$<br>On obtient une inégalité. |

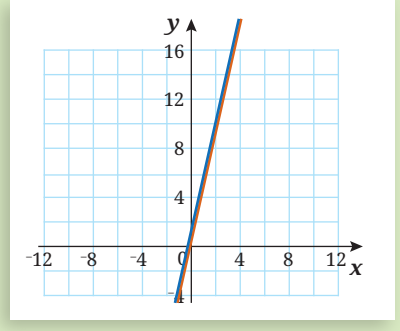



Un système d'équations formé de deux équations associées à des droites parallèles confondues (qui ont les mêmes pentes et les mêmes ordonnées) admet une **infinité de solutions**. Plus précisément, sa résolution conduit à une égalité de type 0 = 0.

**EXEMPLE 2**

$$y = 5x + 1$$
$$y - 5x - 1 = 0$$

| | |
|---|---|
| Résoudre le système d'équations. | Méthode de substitution<br>$y - 5x - 1 = 0$<br>$(5x + 1) - 5x - 1 = 0$<br>$0 = 0$<br>On obtient une égalité de type 0 = 0. |




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Un système d'équations formé de deux équations associées à des droites sécantes (qui ont des pentes différentes) n'admet qu'une **seule solution**, car ces droites se rencontrent en un seul point d'intersection. Plus précisément, sa résolution conduit à un couple solution $(x, y)$.

**EXEMPLE**

$$y = 3x + 2$$
$$4x - y = 1$$

Résoudre le système d'équations.

Méthode de substitution

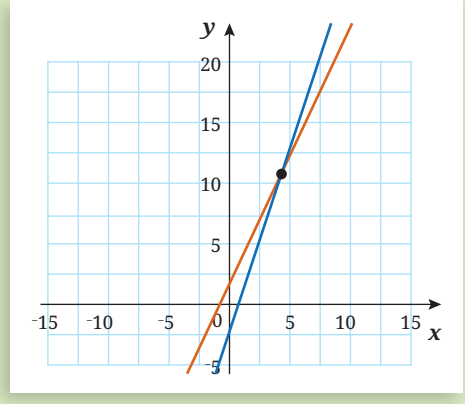
$$4x - y = 1$$
$$4x - (3x + 2) = 1$$
$$x - 2 = 1$$
$$x = 3$$
$$y = 3x + 2$$
$$y = 3(3) + 2$$
$$y = 9 + 2$$
$$y = 11$$

$(3, 11)$

Validation

$$4x - y = 1$$
$$4(3) - (11) = 1$$

On obtient le couple solution (3, 11).



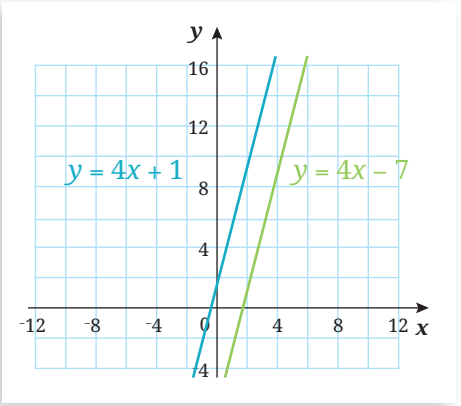

## EXERCICES

★**1.** Indiquez si chaque énoncé est vrai ou faux.

| | | Vrai | Faux |
|---|---|---|---|
| **a** | Un système d'équations formé de deux droites sécantes comporte une seule solution. | ☑ | ☐ |
| **b** | La résolution d'un système d'équations formé de deux droites perpendiculaires mène à un couple solution. | ☑ | ☐ |
| **c** | La résolution d'un système d'équations formé de deux droites parallèles confondues mène à une inégalité. | ☐ | ☑ |
| **d** | Un système d'équations formé de deux droites parallèles distinctes comporte une infinité de solutions. | ☐ | ☑ |
| **e** | Un système d'équations formé de deux droites sécantes mène à une égalité de type $0 = 0$. | ☐ | ☑ |

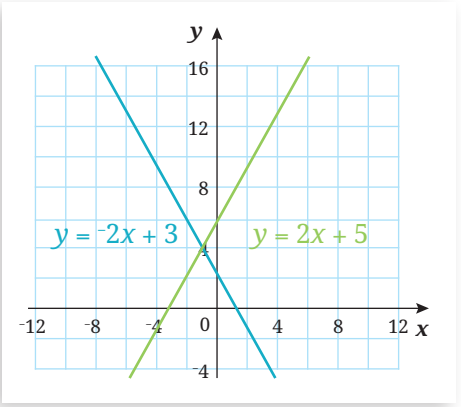
★**2.** Déterminez le nombre de solutions des systèmes d'équations représentés par les graphiques suivants.

**a**



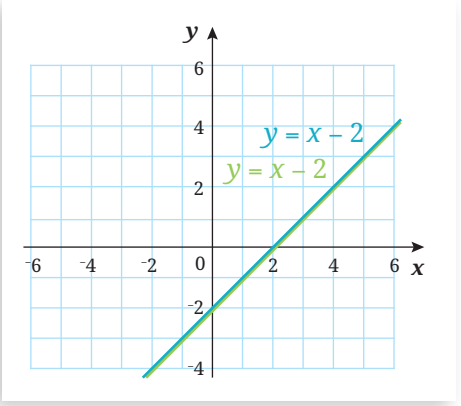

Le système n'admet aucune solution.

**b**



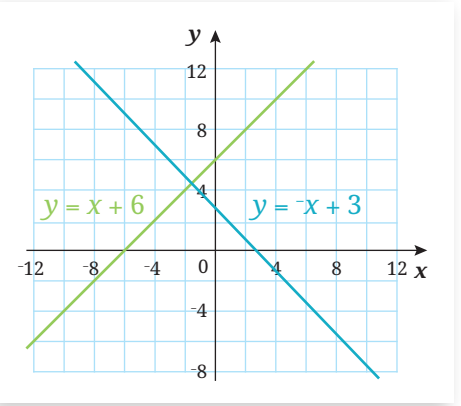

Le système admet une seule solution.

**c**



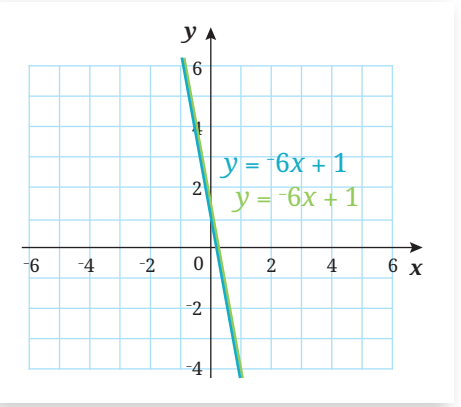

Le système admet une infinité de solutions.

**d**



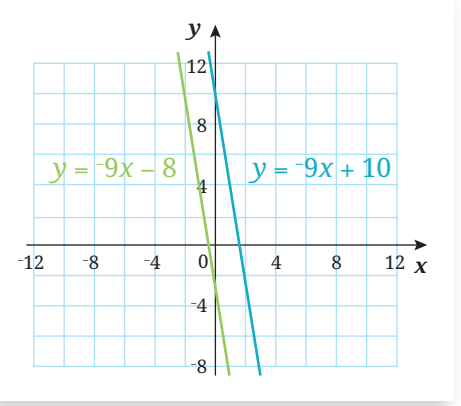

Le système admet une seule solution.

**e**




Le système admet une infinité de solutions.

**f**




Le système n'admet aucune solution.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**3.** Indiquez le nombre de solutions qu'admet chacun des systèmes d'équations ci-dessous et justifiez votre réponse.

**a** $y = 5x + 1$ et $y - 5x = 4$

$$\begin{aligned} y - 5x &= 4 \\ (5x + 1) - 5x &= 4 \\ 1 &\neq 4 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** La résolution conduit à une inégalité et les droites sont parallèles distinctes ; il n'y a donc aucune solution.

**b** $y = x + 4$ et $y + 3x = -8$

$$\begin{aligned} y + 3x &= -8 \\ (x + 4) + 3x &= -8 \\ 4x + 4 &= -8 \\ 4x &= -12 \\ x &= -3 \\ y &= x + 4 \\ y &= -3 + 4 \\ y &= 1 \\ (-3, 1) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + 3x &= -8 \\ 1 + 3(-3) &= -8 \\ 1 - 9 &= -8 \\ -8 &= -8 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** La résolution conduit au couple solution $(-3, 1)$ et les droites sont sécantes ; il y a donc une seule solution.

**c** $y = -7x + 7$ et $y = -7x + 7$

$$\begin{aligned} y &= y \\ -7x + 7 &= -7x + 7 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** La résolution conduit à une égalité de type $0 = 0$ et les droites sont parallèles confondues ; il y a donc une infinité de solutions.

# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 4

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

★**1.** Combien de solutions admet le système d'équations suivant ?

$$\begin{aligned} 2y + 8x &= 9 \\ y &= {}^{-}20x + 3 \end{aligned}$$

**a** Aucune solution

**b** Une infinité de solutions

**c** Une seule solution

★**2.** Parmi les énoncés suivants, lequel est exact ?

**a** Le système formé par les équations $y = 2x + 8$ et $y = {}^{-}3x + 1$ comporte une infinité de solutions.

**b** Le système formé par les équations $4x + y = 16$ et $y = {}^{-}2x + 8$ comporte une seule solution.

**c** Les droites $y = {}^{-}0{,}5x + 1$ et $y = 15x - 5$ sont perpendiculaires.

**d** Le système formé par les équations $6x + 7 = y$ et ${}^{-}8x + 3y = 9$ n'admet aucune solution.

**CALCULS**

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**3.** Quelle équation correspond à la forme $y = ax + b$ de $y + 8x - 6 = 0$ ?

**a** $y = 8x - 6$ **b** $y = {-}8x + 6$ **c** $y = {-}8x - 6$ **d** $y + 8x = 6$

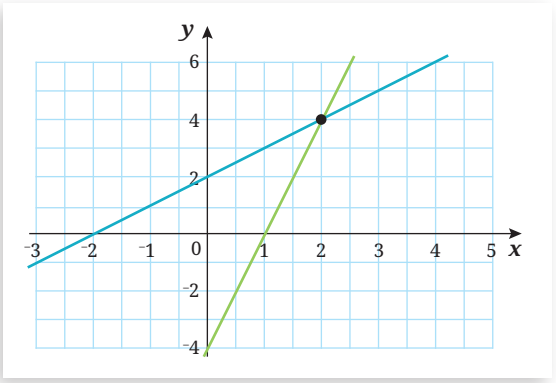
★**4.** Quelle est la solution du système d'équations suivant ?

**a** (0, 0)

**b** (2, $^{-}$4)

**c** (2, 4)

**d** ($^{-}$2, 4)




★**5.** Quel type de réponse la résolution du système d'équations suivant entraîne-t-elle ?

$$y = {-}5x + \frac{1}{2}$$
$$y = {-}5x - 4$$

**a** Un couple solution $(x, y)$ **b** Une inégalité **c** Une égalité de type $0 = 0$

## CALCULS

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**6.** Résolvez chacun des systèmes d'équations ci-dessous.

**a** $y = -4x + 5$ et $y = -2x - 7$

Méthode de comparaison

$y = y$
$-4x + 5 = -2x - 7$
$-2x + 5 = -7$
$-2x = -12$
$x = 6$
$y = -4x + 5$
$y = -4(6) + 5$
$y = -24 + 5$
$y = -19$
$(6, -19)$

Validation

$y = -4x + 5$
$-19 = -4(6) + 5$
$-19 = -24 + 5$
$-19 = -19$

$y = -2x - 7$
$-19 = -2(6) - 7$
$-19 = -12 - 7$
$-19 = -19$

**RÉPONSE** Le couple solution est $(6, -19)$.

**b** $2y - 10x = -6$ et $y = 8x + 4$

Méthode de substitution

$2y - 10x = -6$
$2(8x + 4) - 10x = -6$
$16x + 8 - 10x = -6$
$6x + 8 = -6$
$6x = -14$
$x = \frac{-7}{3}$ ou $-2,\overline{3}$

$y = 8x + 4$
$y = 8(-2,\overline{3}) + 4$
$y = -18,67 + 4$
$y = -14,67$
$(-2,\overline{3}; -14,67)$

Validation

$2y - 10x = -6$
$2(-14,67) - 10(-2,\overline{3}) = -6$
$-29,34 + 23,\overline{3} = -6$
$-6,04 \approx -6$

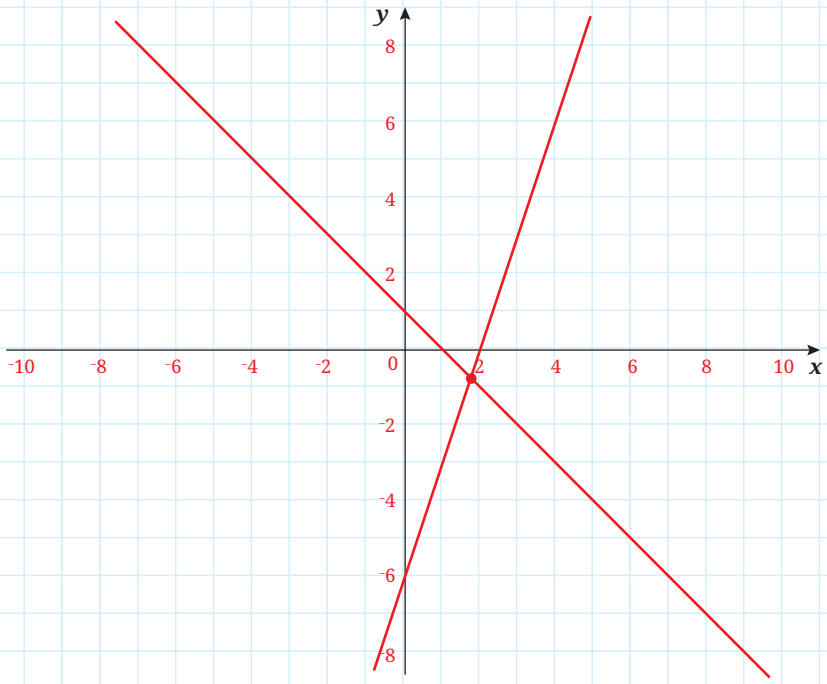
**RÉPONSE** Le couple solution est $(-2,\overline{3}; -14,67)$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**7.** Représentez graphiquement le système d'équations ci-dessous et indiquez algébriquement le couple solution.

$$\begin{aligned} y &= -x + 1 \\ y &= 3x - 6 \end{aligned}$$




Méthode de comparaison

$$\begin{aligned} y &= y \\ -x + 1 &= 3x - 6 \\ -x - 3x + 1 &= -6 \\ -4x + 1 &= -6 \\ -4x &= -7 \\ x &= 1{,}75 \end{aligned}$$

$y = -x + 1$
$y = -1{,}75 + 1$
$y = -0{,}75$
$(1{,}75\,;\,-0{,}75)$

Validation

$$\begin{aligned} y &= 3x - 6 \\ -0{,}75 &= 3(1{,}75) - 6 \\ -0{,}75 &= 5{,}25 - 6 \\ -0{,}75 &= -0{,}75 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Le couple solution est $(1{,}75\,;\,-0{,}75)$.

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★**8.** Deux randonneurs escaladent une paroi rocheuse escarpée. L'altitude qu'ils atteignent, en mètres, selon le temps écoulé, en minutes, depuis leur départ est représentée par le système d'équations suivant.

$$1800 + 7t - A = 1250$$
$$1800 + 12t - 2A = 0$$

où $A$ est l'altitude des randonneurs (m)
et $t$ est le temps écoulé depuis le départ (min).

**a** Après combien de minutes les deux randonneurs se trouveront-ils à la même altitude ?

Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de réduction
Multiplication par 2 de la première équation.

$$\begin{aligned} 1800 + 7t - A &= 1250 \\ 3600 + 14t - 2A &= 2500 \end{aligned} \quad \times 2$$

$$\begin{aligned} 3600 + 14t - 2A &= 2500 \\ -(1800 + 12t - 2A &= 0) \\ 1800 + 2t &= 2500 \\ 2t &= 700 \\ t &= 350 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Après 350 minutes, les deux randonneurs se trouveront à la même altitude.

**b** Quelle sera cette altitude ?

$$\begin{aligned} 1800 + 12t - 2A &= 0 \\ 1800 + 12(350) &= 2A \\ 6000 &= 2A \\ 3000 &= A \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Cette altitude sera de 3000 m.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★ **9.** Micheline rêve de faire une croisière sur la mer Méditerranée avec sa famille. Elle contacte une agence de voyage qui lui donne deux exemples de prix payé par des familles le mois dernier pour la même croisière. Comme les tarifs n'ont pas changé depuis, voici les informations que Micheline a notées.

**Une famille de quatre enfants et de deux adultes a payé 6130 $.**

**Une famille de trois adultes et de deux enfants a déboursé 5815 $.**

**a** Déterminez le prix par enfant et le prix par adulte pour cette croisière.

**1** Identification des variables

$x$ : prix pour un enfant ($)

$y$ : prix pour un adulte ($)

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$4x + 2y = 6130$

$2x + 3y = 5815$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de réduction

Multiplication par 2 de la seconde équation.

$2x + 3y = 5815$

$4x + 6y = 11\,630$ $\times 2$

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6130 \\ -(4x + 6y &= 11\,630) \\ \hline -4y &= -5500 \\ y &= 1375\,\$ \end{aligned}$$

$4x + 2y = 6130$

$4x + 2(1375) = 6130$

$4x + 2750 = 6130$

$4x = 3380$

$x = 845$

(845, 1375)

**4** Validation

$2x + 3y = 5815$

$2(845) + 3(1375) = 5815$

$1690 + 4125 = 5815$

$5815 = 5815$

**RÉPONSE** Pour cette croisière, le prix par enfant est de 845 $ et le prix par adulte est de 1375 $.

**b** Si elle a un budget de 7000 $, Micheline peut-elle faire cette croisière avec son mari et ses cinq petits-enfants ?

**1** Traduction de la situation par une équation

$5x + 2y = ?$

**2** Prix de la croisière

$5(845) + 2(1375) = 6975$

**RÉPONSE** Oui, Micheline peut faire cette croisière avec son mari et ses cinq petits-enfants avec un budget de 7000 $, car le prix total s'élève à 6975 $.

★★ **10.** Mia-Kim est une comptable spécialisée dans la déclaration fiscale. Pour les gens qui font produire leur déclaration avant le 1er avril de chaque année, elle demande 75 $. Pour ceux qui le font après le 1er avril, elle demande 90 $. L'an dernier, elle a gagné 10 350 $. Sachant qu'elle a reçu trois fois plus de dossiers après le 1er avril qu'avant cette date, calculez le nombre de déclarations de revenus qu'elle a produites après le 1er avril l'an dernier.

**1** Identification des variables

$x$ : nombre de rapports d'impôts déposés avant le 1er avril

$y$ : nombre de rapports d'impôts déposés après le 1er avril

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$$\begin{cases} 75x + 90y = 10\,350 \\ y = 3x \end{cases}$$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution

$$\begin{aligned} 75x + 90y &= 10\,350 \\ 75x + 90(3x) &= 10\,350 \\ 75x + 270x &= 10\,350 \\ 345x &= 10\,350 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

$y = 3x$

$y = 3(30)$

$y = 90$

(30, 90)

**4** Validation

$75x + 90y = 10\,350$

$75(30) + 90(90) = 10\,350$

$2250 + 8100 = 10\,350$

$10\,350 = 10\,350$

**RÉPONSE** L'an dernier, Mia-Kim a produit 30 déclarations de revenus avant le 1er avril et 90 autres après cette date.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## Du café artisanal

Christopher et Amélie viennent d'ouvrir leur propre boutique de café artisanal. À la fin de leur première journée, ils souhaitent évaluer les ventes qu'ils ont effectuées. Voici une description des deux produits qu'ils ont vendus.

| | POIDS (kg) | PRIX ($) |
|---|---|---|
| SAC DE CAFÉ VELOUTÉ | 0,8 | 9,50 |
| SAC DE CAFÉ CORSÉ | 0,7 | 11,75 |

S'ils ont fait 278,50 $ en vendant 19,4 kg de café, combien de sacs de chaque sorte Christopher et Amélie ont-ils vendus ?

**1** Identification des variables

$x$ : nombre de sacs de café velouté vendus

$y$ : nombre de sacs de café corsé vendus

**2** Traduction de la situation par un système d'équations

$0{,}8x + 0{,}7y = 19{,}4$

$9{,}50x + 11{,}75y = 278{,}50$

**3** Résolution du système d'équations à l'aide de la méthode de substitution

$0{,}8x + 0{,}7y = 19{,}4$ ou $y = {-}1{,}14x + 27{,}71$

$9{,}50x + 11{,}75y = 278{,}50$

$9{,}50x + 11{,}75({-}1{,}14x + 27{,}71) = 278{,}50$

$9{,}50x - 13{,}40x + 325{,}59 = 278{,}50$

$-3{,}9x = -47{,}09$

$x \approx 12$

$y = {-}1{,}14x + 27{,}71$

$y = {-}1{,}14(12) + 27{,}71$

$y = {-}13{,}68 + 27{,}71$

$y \approx 14$

$(12, 14)$

**4** Validation

$9{,}50x + 11{,}75y = 278{,}50$

$9{,}50(12) + 11{,}75(14) = 278{,}50$

$114 + 164{,}50 = 278{,}50$

$278{,}50 = 278{,}50$

**RÉPONSE** Christopher et Amélie ont vendu 12 sacs de café velouté et 14 sacs de café corsé.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# SITUATION-PROBLÈME

CD1

## La collation récompense

Magaly, Simon, Jasmine et Mario sont quatre enseignants qui ont organisé une sortie scolaire. Sur le chemin du retour, ils font un arrêt dans une épicerie afin d'acheter une collation récompense pour l'ensemble des élèves. Magaly a dépensé 22,35 $ pour 2 contenants de jus, 3 sacs de noix mélangées et 4 boîtes de chocolats. Simon, lui, a acheté 5 contenants de jus, 3 sacs de noix mélangées et une boîte de chocolats pour la somme de 17,40 $. Jasmine, quant à elle, est revenue avec 6 contenants de jus et 2 boîtes de chocolats pour un total de 15,30 $.

Combien Mario a-t-il dépensé pour un contenant de jus, 4 sacs de noix mélangées et 3 boîtes de chocolats ?

Plusieurs démarches possibles.

**1** Identification des inconnues

$x$ : prix d'un contenant de jus
$y$ : prix d'un sac de noix mélangées
$z$ : prix d'une boîte de chocolats

**2** Formulation des équations

Magaly : $2x + 3y + 4z = 22{,}35$
Simon : $5x + 3y + z = 17{,}40$
Jasmine : $6x + 2z = 15{,}30$
Mario : $x + 4y + 3z = ?$

**3** Réduction des équations de Magaly et de Simon pour enlever la variable $y$

$$\begin{array}{rl} & 2x + 3y + 4z = 22{,}35 \\ - & 5x + 3y + z = 17{,}40 \\ \hline & -3x + 3z = 4{,}95 \end{array}$$ ❶

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**4** Valeur de $z$ dans l'équation de Jasmine

$$6x + 2z = 15{,}30$$
$$2z = 15{,}30 - 6x$$
$$z = 7{,}65 - 3x$$

**5** Remplacement de la variable $z$ par sa valeur dans l'équation ❶

$$^{-}3x + 3z = 4{,}95\,\$ \rightarrow {}^{-}3x + 3(7{,}65 - 3x) = 4{,}95 \rightarrow {}^{-}3x + 22{,}95 - 9x = 4{,}95$$
$$\rightarrow {}^{-}12x + 22{,}95 = 4{,}95$$

**6** Valeur de $x$

$$^{-}12x + 22{,}95 = 4{,}95$$
$$^{-}12x = {}^{-}18$$
$$x = 1{,}50$$

**7** Prix d'une boîte de chocolats à partir de l'équation de Jasmine

$$6x + 2z = 15{,}30$$
$$6 \bullet 1{,}50 + 2z = 15{,}30$$
$$9 + 2z = 15{,}30$$
$$2z = 6{,}30$$
$$z = 3{,}15$$

**8** Prix d'un sac de noix mélangées à partir de l'équation de Simon

$$5x + 3y + z = 17{,}40$$
$$5 \bullet 1{,}50 + 3y + 3{,}15 = 17{,}40$$
$$7{,}50 + 3y + 3{,}15 = 17{,}40$$
$$3y + 10{,}65 = 17{,}40$$
$$3y = 6{,}75$$
$$y = 2{,}25$$

**9** Somme dépensée par Mario

$$x + 4y + 3z = ?$$
$$1{,}50 + 4 \bullet 2{,}25 + 3 \bullet 3{,}15 = 19{,}95$$

**RÉPONSE** Mario a dépensé 19,95 $ pour ses achats.

# FEUILLE DE NOTES

## Interprétation d'un système d'équations

Un système d'équations est formé d'au moins deux équations.

Le résoudre consiste à en trouver le couple solution $(x, y)$.

## Méthode de substitution

1. Insérer dans l'une des équations l'équation correspondant à l'une des variables isolées.
2. Résoudre l'équation.
3. Insérer dans l'une des équations de départ la valeur obtenue lors de la résolution pour déterminer la valeur de l'autre variable et obtenir le couple solution.
4. Valider la solution en remplaçant $x$ et $y$ par les valeurs obtenues dans l'autre équation de départ.

## Nombre de solutions d'un système d'équations

**Aucune solution**

- Même pente, $b$ différents
- Résolution → inégalité

**Une infinité de solutions**

- Même pente, même $b$
- Résolution → égalité de type $0 = 0$

**Une seule solution**

- Pente différente
- Résolution → couple solution $(x, y)$

## Méthode de comparaison

1. Isoler $y$ dans les deux équations.
2. Comparer les valeurs de $y$ en posant une égalité entre ces valeurs.
3. Résoudre l'équation.
4. Trouver la valeur de $y$ en remplaçant $x$ par sa valeur dans l'une des deux équations de départ afin d'obtenir le couple solution.
5. Valider la réponse en remplaçant $x$ et $y$ par leur valeur respective dans l'équation de départ afin d'obtenir une égalité.

## Méthode de réduction

1. Constituer un système d'équations dans lequel les coefficients d'au moins une des deux variables sont égaux en faisant appel à la multiplication ou à la division.
2. Soustraire les deux équations pour éliminer l'une des deux variables.
3. Résoudre l'équation.
4. Insérer dans l'une des équations de départ la valeur obtenue lors de la résolution pour déterminer la valeur de l'autre variable et obtenir le couple solution.
5. Valider la solution en remplaçant $x$ et $y$ par les valeurs obtenues dans l'autre équation de départ.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# CONSOLIDATION DE L'ÉTAPE 2

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

★1. Quelle est l'équation d'une droite perpendiculaire à une droite passant par les points suivants ?

**A(⁻12, ⁻25) et B(8, 5)**

**a** $y = \frac{^{-}3}{2}x + 7$ **b** $y = \frac{^{-}2}{3}x + 3$ **c** $y = \frac{2}{3}x - 6$ **d** $\square = \frac{3}{2} - 9$

★2. Quel énoncé est vrai ?

**a** Deux droites parallèles ont toujours la même pente, mais des ordonnées à l'origine différentes.

**b** Deux droites sécantes ont plusieurs solutions.

**c** Deux droites perpendiculaires ont des pentes qui sont l'inverse l'une de l'autre.

**d** Il est impossible de trouver une seule solution pour un système d'équations composé de deux droites parallèles.

★3. Quelle distance, à l'unité près, sépare les points suivants ?

**C(⁻33, 12) et B(15, ⁻43)**

**a** 27 unités **b** 36 unités **c** 58 unités **d** 73 unités

### CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★4. De quel système d'équations le couple $(^{-}5, ^{-}13)$ est-il la solution ?

**a** $y = 4x + 7$ et $y = 2x - 3$

**b** $y = 5x + 12$ et $y = ^{-}2x - 22$

**c** $y = ^{-}3x - 6$ et $y = 6x + 17$

**d** $y = x - 8$ et $y = ^{-}2x - 22$

★5. Quel énoncé est faux ?

**a** Le point de partage peut séparer un segment en deux parties égales.

**b** Le point milieu divise un segment dans un rapport 1 : 1.

**c** Le rapport 3 : 6 d'un point de partage indique que le point P sépare le segment en deux parties, dont l'une mesure la moitié de l'autre.

**d** Si un point de partage est situé au quart de la longueur d'un segment, alors l'une des parties mesure le quart de l'autre partie.

★★6. Dans un plan cartésien, le point A est situé aux coordonnées (1, 7) et le point P aux coordonnées $(^{-}1, 1)$. Quelles sont les coordonnées du point B si le point P divise le segment AB dans un rapport 2 : 5 ?

**a** $(^{-}6, ^{-}14)$ **b** $(^{-}4, ^{-}8)$ **c** $\left(\frac{^{-}11}{7}, \frac{^{-}5}{7}\right)$ **d** $\left(\frac{^{-}9}{5}, \frac{^{-}7}{5}\right)$

★★7. Quelle est la solution du système d'équations ci-dessous ?

$$y = ^{-}5x + 3 \text{ et } 31x - 7y = 12$$

**a** $\left(\frac{^{-}33}{4}, \frac{177}{4}\right)$ **b** $\left(\frac{^{-}3}{22}, \frac{81}{22}\right)$ **c** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **d** $\left(\frac{9}{4}, \frac{^{-}33}{4}\right)$

★★8. Quelle est la solution du système d'équations suivant ?

$$4x + 3y = 26 \text{ et } 2x - 16y = ^{-}22$$

**a** $(1, ^{-}6)$ **b** $(3, 2)$ **c** $(5, 2)$ **d** $(7, ^{-}6)$

## CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★ **9.** Résolvez le système d'équations suivant.

$y = 8x - 75$ et $3x - 5y = 42$

Par la méthode de substitution

**1** Valeur de $x$

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 42 \\ 3x - 5(8x - 75) &= 42 \\ 3x - 40x + 375 &= 42 \\ -37x &= -333 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

**2** Valeur de $y$

$$\begin{aligned} y &= 8x - 75 \\ y &= 8 \cdot 9 - 75 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Le couple solution est $(9, -3)$.

★★ **10.** Résolvez le système d'équations ci-dessous.

$12x - 7y = -88$ et $5y - 3x = 35$

Par la méthode de substitution

**1** Multiplication par $-4$ de la seconde équation

$-3x + 5y = 35 \times (-4)$ $\quad 12x - 20y = -140$

**2** Valeur de $y$

$$\begin{aligned} 12x - 7y &= -88 \\ -\ 12x - 20y &= -140 \\ \hline 13y &= 52 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

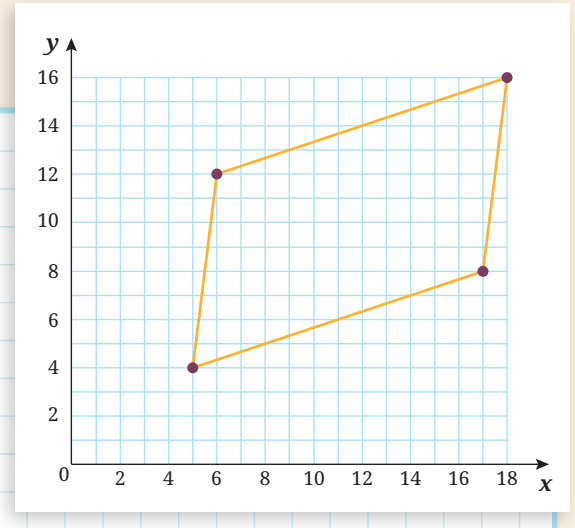
**3** Valeur de $x$

$$\begin{aligned} 12x - 7y &= -88 \\ 12x - 7 \cdot 4 &= -88 \\ 12x - 28 &= -88 \\ 12x &= -60 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

**RÉPONSE** Le couple solution est $(-5, 4)$.

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

**11.** Déterminez l'aire du parallélogramme illustré dans le plan cartésien ci-contre.




Plusieurs démarches possibles.

**1** Distance entre D et C

$$\text{dist(D, C)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{dist(D, C)} = \sqrt{(17 - 5)^2 + (8 - 4)^2}$$

$$\text{dist(D, C)} = \sqrt{12^2 + 4^2}$$

$$\text{dist(D, C)} = \sqrt{160}$$

$$\text{dist(D, C)} \approx 12{,}65 \text{ u}$$

**2** Pente de la droite passant par D et C

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\square = \frac{8 - 4}{17 - 5}$$

$$\square = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

**3** Équation de la droite passant par D et C

$$y = \frac{1}{3}x + b$$

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 5 + \square$$

$$\frac{7}{3} = \square$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

**4** Pente de la droite perpendiculaire à $\overline{DC}$

$$^-1 = \frac{1}{3} \cdot \square$$

$$^-3 = a$$

**5** Équation de la droite perpendiculaire à $\overline{DC}$ et passant par A

$$y = {}^-3x + b$$

$$12 = {}^-3 \cdot 6 + b$$

$$30 = b$$

$$y = {}^-3x + 30$$

**6** Point d'intersection E entre le segment DC et sa perpendiculaire passant par A

$$\frac{1}{3}\square + \frac{7}{3} = {}^-3\square + 30$$

$$\frac{10}{3}\square = \frac{83}{3}$$

$$\square = \frac{83}{10}$$

$$\square = {}^-3 \cdot \frac{83}{10} + 30$$

$$\square = \frac{51}{10}$$

$$\text{E}\left(\frac{83}{10}, \frac{51}{10}\right)$$

**7** Distance entre A et E

$$\text{dist(A, E)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{dist(A, E)} = \sqrt{\left(\frac{83}{10} - 6\right)^2 + \left(\frac{51}{10} - 12\right)^2}$$

$$\text{dist(A, E)} = \sqrt{\left(\frac{23}{10}\right)^2 + \left(\frac{^-69}{10}\right)^2}$$

$$\text{dist(A, E)} = \sqrt{\frac{529}{10}}$$

$$\text{dist(A, E)} \approx 7{,}27 \text{ u}$$

**8** Aire du parallélogramme

$$A = b \cdot h$$

$$A = 12{,}65 \cdot 7{,}27$$

$$A \approx 91{,}97 \text{ u}^2$$

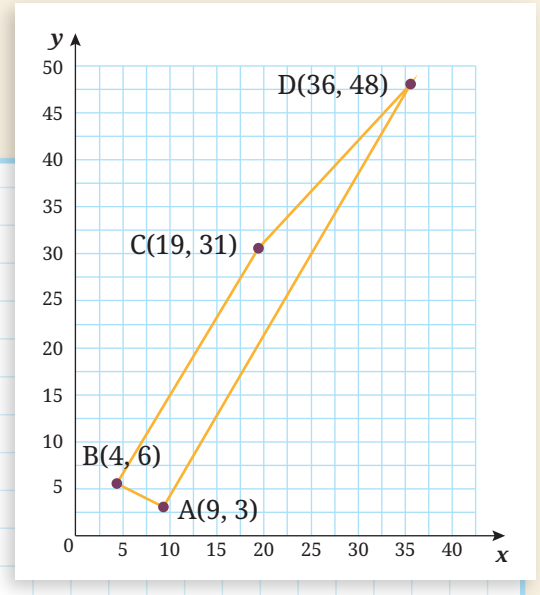
**RÉPONSE** L'aire du parallélogramme est de 91,97 u².

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★ **12.** Démontrez que la figure tracée dans le plan cartésien ci-contre est un trapèze rectangle.




**1** Pente de la droite passant par A et D

A(9, 3) et D(36, 48)

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\square = \frac{48 - 3}{36 - 9}$

$\square = \frac{45}{27} = \frac{5}{3}$

**2** Pente de la droite passant par A et B

A(9, 3) et B(4, 6)

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\square = \frac{6 - 3}{4 - 9}$

$\square = \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}$

$\frac{-3}{5} \cdot \frac{5}{3} = -1$

Les segments AB et AD sont perpendiculaires, car le produit de leurs taux de variation est $-1$.

**3** Pente de la droite passant par B et C

B(4, 6) et C(19, 31)

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\square = \frac{31 - 6}{19 - 4}$

$\square = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$

Les segments AD et BC sont parallèles, car ils ont le même taux de variation. Les segments CB et AB sont donc perpendiculaires.

**RÉPONSE** La figure est bel et bien un trapèze rectangle, car elle est composée de deux droites parallèles de longueurs différentes reliées par un segment perpendiculaire.

★★ **13.** Mickael et Lucie vendent des tablettes de chocolat et des sacs de café pour financer leur voyage étudiant. Mickael a vendu 47 tablettes de chocolat et 27 sacs de café pour un total de 326,50 $, alors que Lucie a ramassé 279,00 $ en vendant 18 tablettes de chocolat et 36 sacs de café. Calculez combien coûtent respectivement une tablette de chocolat et un sac de café.

Plusieurs démarches possibles.

**1** Identification des variables
$x$ : prix d'une tablette de chocolat
$y$ : prix d'un sac de café

**2** Équation représentant les ventes de Mickael
$47x + 27y = 326{,}50$

**3** Équation représentant les ventes de Lucie
$18x + 36y = 279{,}00$

Par la méthode de substitution

**4** Valeur de $x$ dans l'équation des ventes de Lucie
$18x + 36y = 279{,}00$
$18x = {-}36y + 279{,}00$
$x = {-}2y + 15{,}50$

**5** Prix d'une tablette de chocolat
$18x + 36 \cdot 6{,}00 = 279{,}00$
$18x + 216{,}00 = 279{,}00$
$18x = 63{,}00$
$x = 3{,}50$

**6** Prix d'un sac de café
$47({-}2y + 15{,}50) + 27y = 326{,}50$
${-}94y + 728{,}50 + 27y = 326{,}50$
${-}67y = {-}402{,}00$
$y = 6{,}00$

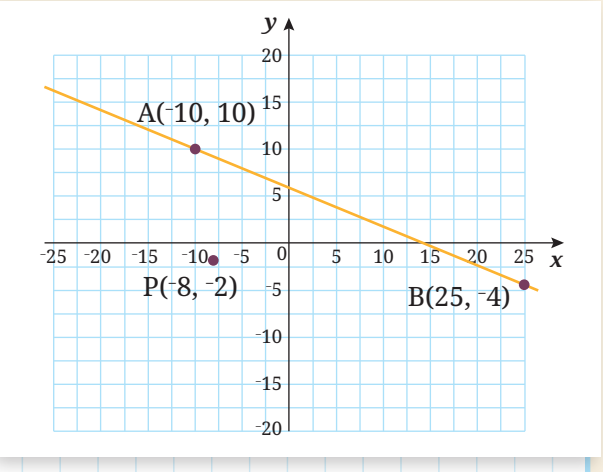
**RÉPONSE** Une tablette de chocolat et un sac de café coûtent respectivement 3,50 $ et 6,00 $.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**14.** Déterminez la distance la plus courte entre le point P et la droite passant par les points A et B.




**1** Équation de la droite

Calcul de la pente

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\square = \frac{^-4 - 10}{25 - ^-10}$$

$$\square = \frac{^-14}{35} = \frac{^-2}{5}$$

$$y = \frac{^-2}{5}x + b$$

Valeur initiale

$$10 = \frac{^-2}{5} \bullet {}^-10 + \square$$

$$10 = 4 + b$$

$$6 = b$$

$$y = \frac{^-2}{5}x + 6$$

**2** Équation de la droite étant perpendiculaire à la droite AB et passant par P

$$^-1 = \frac{^-2}{5} \bullet \square$$

$$\frac{5}{2} = \square$$

$$y = \frac{5}{2}x + b$$

$$^-2 = \frac{5}{2} \bullet {}^-8 + \square$$

$$^-2 = {}^-20 + b$$

$$18 = b$$

$$y = \frac{5}{2}x + 18$$

**3** Point d'intersection (R) entre les deux droites

$$\frac{^-2}{5}\square + 6 = \frac{5}{2}\square + 18$$

$$\frac{^-29}{10}\square = 12$$

$$\square = \frac{^-120}{29}$$

$$\square = \frac{5}{2} \bullet \frac{^-120}{29} + 18$$

$$\square = \frac{222}{29}$$

$$\left(\frac{^-120}{29}, \frac{222}{29}\right)$$

**4** Distance entre P et R

$$\text{dist(P, R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{dist(P, R)} = \sqrt{\left(\frac{^-120}{29} - (^-8)\right)^2 + \left(\frac{222}{29} - (^-2)\right)^2}$$

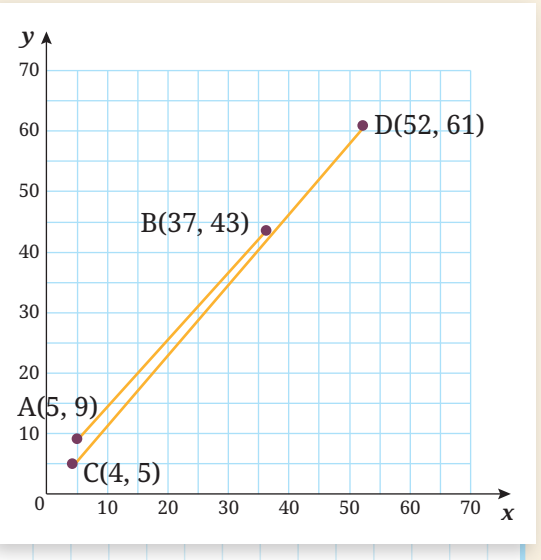
$$\text{dist(P, R)} = \sqrt{\left(\frac{112}{29}\right)^2 + \left(\frac{280}{29}\right)^2}$$

$$\text{dist(P, R)} = \sqrt{\frac{3136}{29}}$$

$$\text{dist(P, R)} \approx 10{,}40 \text{ u}$$

**RÉPONSE** La distance la plus courte passant par P et la droite AB mesure 10,40 unités.

★★ **15.** Démontrez que la droite reliant le point milieu du segment AB et le point de partage du segment CD dans un rapport 3:5 à partir du point C est une droite horizontale.




**1** Coordonnées du point milieu du segment AB

$$\square_M = \frac{\square_1 + \square_2}{2}$$

$$\square_M = \frac{5+37}{2}$$

$$x_M = 21$$

$$y_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\square_M = \frac{9+43}{2}$$

$$y_M = 26$$

M(21, 26)

**2** Coordonnées de P qui divise le segment CD dans un rapport 3:5

$$k = \frac{a}{a+b}$$

$$\square = \frac{3}{3+5}$$

$$\square = \frac{3}{8}$$

$$x_P = x_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$\square_P = 4 + \frac{3}{8}(52-4)$$

$$\square_P = 4 + \frac{3}{8}(48)$$

$$x_P = 22$$

$$y_P = y_1 + k(y_2 - y_1)$$

$$\square_P = 5 + \frac{3}{8}(61-5)$$

$$\square_P = 5 + \frac{3}{8}(56)$$

$$y_P = 26$$

P(22, 26)

**3** Pente entre M et P

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\square = \frac{26-26}{22-21}$$

$$\square = \frac{0}{1} = 0$$

**RÉPONSE** Puisque la pente est nulle, la droite est horizontale.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

Chapitre

5

# LES SIMILITUDES ET LES ISOMÉTRIES DANS LES TRIANGLES

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée


| | | |
|---|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | | 224 |
| **5.1** | Les démonstrations | 226 |
| **5.2** | Les triangles semblables | 232 |
| **5.3** | Les triangles isométriques | 245 |
| **5.4** | Les relations métriques dans les triangles rectangles | 258 |
| **Consolidation du chapitre 5** | | 268 |
| **Situation d'application – Mandy l'architecte** | | 278 |
| **Situation-problème – La scène de spectacle** | | 280 |
| **Feuille de notes** | | 282 |

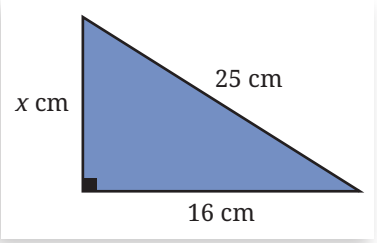
## À QUOI ÇA SERT ?

Les relations métriques et les triangles semblables sont utilisés tous les jours par ceux et celles qui travaillent en architecture, en graphisme ou dont la tâche consiste à représenter des structures ou des logos sur papier. Les logiciels se servent de la similitude entre les formes afin de s'assurer que les plans concordent avec le produit final. De plus, les relations métriques permettent à ces mêmes logiciels de vérifier que les angles droits sont bien droits.

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

★**1.** Déterminez les mesures manquantes dans les triangles suivants.

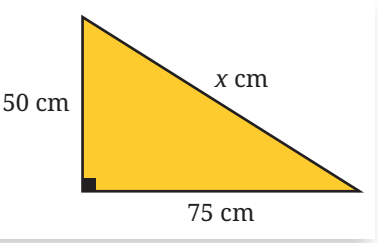
**a**




$a^2 + b^2 = c^2$
$16^2 + x^2 = 25^2$
$256 + x^2 = 625$
$x^2 = 369$
$x \approx 19{,}21$

**RÉPONSE** 19,21 cm

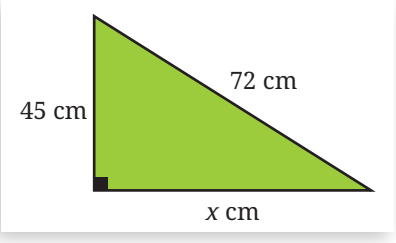
**c**




$a^2 + b^2 = c^2$
$50^2 + 75^2 = x^2$
$2500 + 5625 = x^2$
$8125 = x^2$
$90{,}14 \approx x$

**RÉPONSE** 90,14 cm

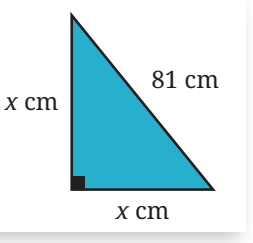
**b**




$a^2 + b^2 = c^2$
$45^2 + x^2 = 72^2$
$2025 + x^2 = 5184$
$x^2 = 3159$
$x \approx 56{,}20$

**RÉPONSE** 56,20 cm

**d**




$a^2 + b^2 = c^2$
$x^2 + x^2 = 81^2$
$2x^2 = 6561$
$x^2 = 3280{,}5$
$x \approx 57{,}28$

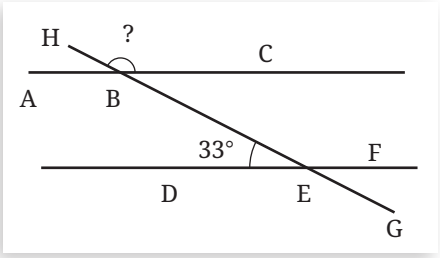
**RÉPONSE** 57,28 cm

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**2.** Calculez les valeurs manquantes dans les figures suivantes. Justifiez vos réponses.

**a**

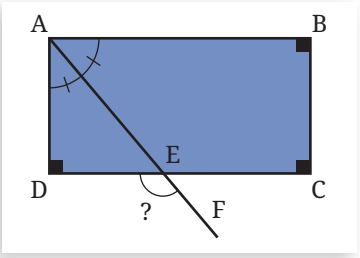



m∠ABH = 33°. Il est correspondant avec ∠DEB.

m∠HBC = 147°. Il est supplémentaire avec ∠ABH, et 180 – 33 = 147°.

**RÉPONSE** m∠HBC = 147°

**c**




m∠BAD = 90°. La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°, et 360 – 90 – 90 – 90 = 90°.

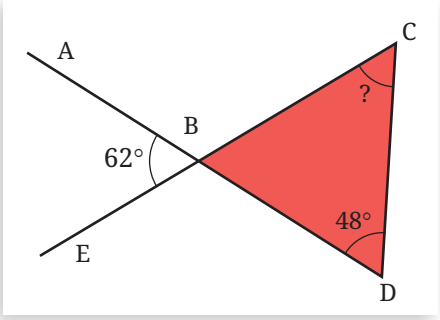
m∠DAE = 45°. Il sépare ∠BAD en deux, et $\frac{90}{2}$ = 45°.

m∠DEA = 45°. La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et 180 – 90 – 45 = 45°.

m∠DEF = 135°. Il est supplémentaire avec ∠DEA, et 180 – 45 = 135°.

**RÉPONSE** m∠DEF = 135°

**b**

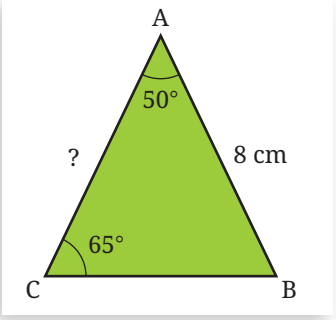



m∠CBD = 62°. Il est opposé par le sommet avec ∠ABE.

m∠BCD = 70°. La somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180, et 180 – 62 – 48 = 70°.

**RÉPONSE** m∠BCD = 70°

**d**




m∠CBA = 65°. La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180, et 180 – 65 – 50 = 65°.

m$\overline{AC}$ = 8 cm. Dans un triangle, les côtés opposés aux angles isométriques sont isométriques.

**RÉPONSE** m$\overline{AC}$ = 8 cm

# 5.1 LES DÉMONSTRATIONS

## Effectuer des preuves

Un **théorème** est une affirmation qui peut être démontrée et qui est considérée comme vraie par la communauté mathématique.

Plusieurs propriétés peuvent servir à démontrer certains théorèmes ou à trouver des mesures manquantes dans des figures. Ces propriétés se trouvent dans l'annexe à la fin de ce cahier.

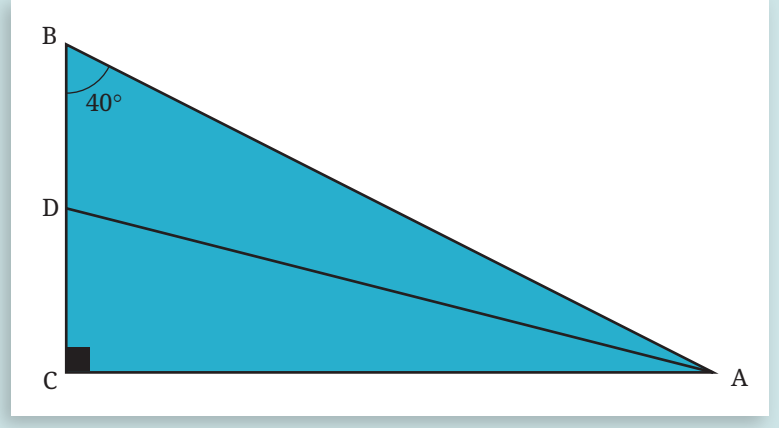
Afin de les organiser, on présente les preuves en deux colonnes.

La colonne de gauche se nomme **Affirmation** et contient toutes les données nécessaires à la preuve. La dernière affirmation doit toujours correspondre à la mesure recherchée ou à la propriété à démontrer.

La colonne de droite se nomme **Justification** et contient toutes les propriétés qui permettent d'expliquer la donnée énoncée dans la colonne de gauche.

**EXEMPLE 1**

**Soit le triangle ci-dessous,**
**où $\overline{AD}$ est une bissectrice.**
**Calculer la mesure de $\angle DAC$.**



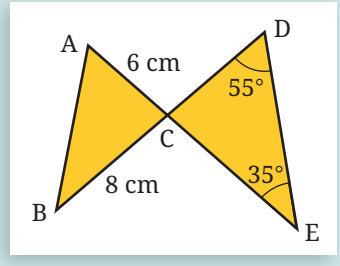

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BAC = 50°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, et $180 - 90 - 40 = 50°$. |
| $m\angle DAC = 25°$ | Une bissectrice sépare un angle en deux angles isométriques, et $\frac{50}{2} = 25°$. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**EXEMPLE 2**

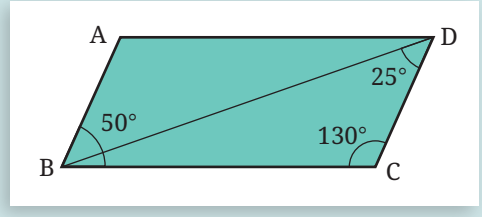
**Déterminer la mesure du $\overline{AB}$ dans la figure ci-contre.**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠DCE = 90° | La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°, et 180 – 35 – 55 = 90°. |
| m∠ACB = 90° | C'est un angle opposé par le sommet avec ∠DCE. |
| ΔABC est rectangle. | Un triangle rectangle possède un angle droit. |
| m$\overline{AB}$ = 10 cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$8^2 + 6^2 = c^2$<br>$64 + 36 = c^2$<br>$100 = c^2$<br>10 cm = $c$ |

**EXEMPLE 3**

**Démontrer que le quadrilatère ci-contre est un parallélogramme, sachant que $\overline{BD}$ est la bissectrice de l'angle ADC.**

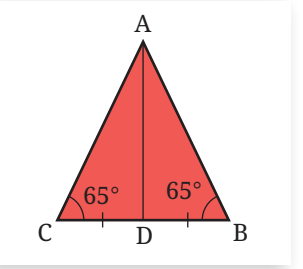



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠ADC = 50° | Une bissectrice sépare un angle en deux angles isométriques, et 25 • 2 = 50°. |
| m∠BAD = 130° | La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est égale à 360°, et 360 – 130 – 50 – 50 = 130°. |
| m∠ADC = m∠ABC<br>m∠BCD = m∠BAD | On se base sur les données du problème et sur les étapes 1 et 2. |
| Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. | Un quadrilatère dont les angles opposés sont isométriques est un parallélogramme. |

## EXERCICES

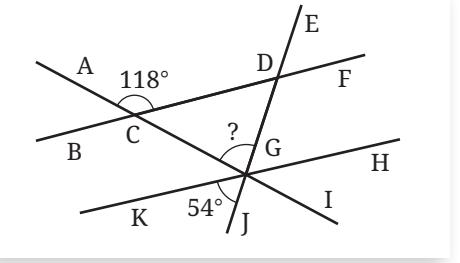
Note à l'enseignant ou l'enseignante : Dans la section qui suit, il y a plusieurs façons d'effectuer les preuves. Il se pourrait que l'élève ne présente pas les mêmes démonstrations que celles du corrigé, mais qu'elles soient tout de même adéquates.

**1.** Démontrez que $\overline{AD}$ est une hauteur dans la représentation suivante.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BAC = 50°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 65 - 65 = 50°$. |
| $\overline{AD}$ est une bissectrice. | Dans un triangle isocèle, un segment partant d'un sommet et coupant le côté opposé en son milieu est aussi la bissectrice de l'angle. |
| $m\angle BAD = 25°$ | Une bissectrice sépare un angle en deux angles isométriques, et $\frac{50}{2} = 25°$. |
| $m\angle BDA = 90°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 65 - 25 = 90°$. |
| $\overline{AD}$ est une hauteur. | Une hauteur coupe un segment à angle droit. |

**2.** Quelle est la mesure de $\angle CGD$ dans l'illustration ci-contre si $\overline{BF} \parallel \overline{HK}$ ?

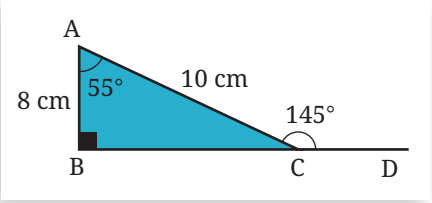



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle DCG = 62°$ | $\angle DCG$ est supplémentaire avec $\angle DCA$, et $180 - 118 = 62°$. |
| $m\angle CDG = 54°$ | $\angle CDG$ est correspondant avec $\angle JGK$, car ces deux angles sont formés par des parallèles et une sécante. |
| $m\angle CGD = 64°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 62 - 54 = 64°$. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

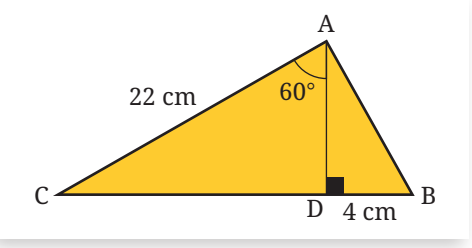
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Calculez la mesure de $\overline{BC}$.



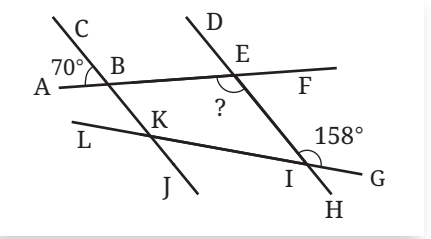

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = 35°$ | $\angle ACB$ est supplémentaire avec $\angle ACD$, et $180 - 145 = 35°$. |
| $m\angle ABC = 90°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 55 - 35 = 90°$. |
| $m\overline{BC} = 6$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$8^2 + b^2 = 10^2$<br>$64 + b^2 = 100$<br>$b^2 = 36$<br>$b = 6$ cm |

★★**4.** Déterminez la mesure de $\overline{AB}$ dans la figure ci-contre.



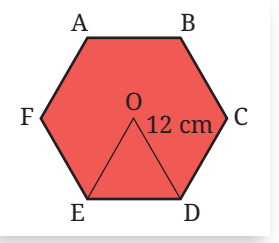

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACD = 30°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 60 - 90 = 30°$. |
| $m\overline{AD} = 11$ cm | Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse, et $\frac{22}{2} = 11$ cm. |
| $m\overline{AB} = 11{,}70$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$11^2 + 4^2 = c^2$<br>$121 + 16 = c^2$<br>$137 = c^2$<br>$11{,}70 \text{ cm} \approx c$ |

★★**5.** Quelle est la mesure de ∠BEI dans la figure ci-contre si $\overline{CJ}$ et $\overline{DH}$ sont parallèles ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠EBK = 70° | ∠EBK est opposé par le sommet avec ∠ABC. |
| m∠EIK = 22° | ∠EIK est supplémentaire avec ∠EIG, et 180 – 158 = 22°. |
| m∠BKI = 158° | ∠BKI est correspondant avec ∠EIG, car ces deux angles sont formés par des parallèles et une sécante. |
| m∠BEI = 150° | La somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est 360°, et 360 – 70 – 22 – 158 = 110°. |

★★★**6.** Déterminez la mesure du périmètre de l'hexagone régulier ABCDEF.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠EOD = 60° | ∠EOD correspond au sixième de l'angle plein O, et $\frac{360}{6} = 60°$. |
| m∠FED = 120° | Dans un hexagone régulier, les angles intérieurs mesurent tous 120°. $\frac{180(□ - 2)}{□} = \frac{180(6 - 2)}{6} = \frac{180(4)}{6} = \frac{720}{6} = 120°$ |
| m∠OED = 60° | ∠OED correspond à la moitié de ∠FED, et $\frac{120}{2} = 60°$. |
| m∠ODE = 60° | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et 180 – 60 – 60 = 60°. |
| ΔODE est équilatéral. | Un triangle équilatéral est formé de trois angles de 60°. |
| m$\overline{ED}$ = 12 cm | Dans un triangle équilatéral, tous les côtés sont isométriques. |
| Le périmètre de ABCDEF mesure 72 cm. | Dans un polygone régulier, tous les côtés sont isométriques, et 12 • 6 = 72 cm. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

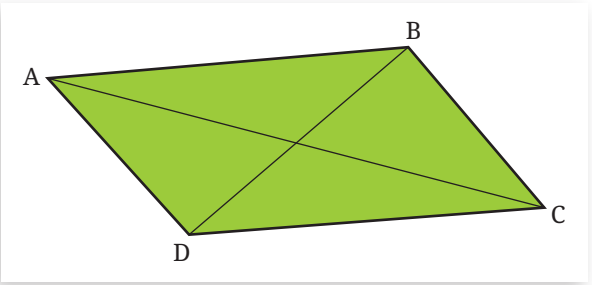
Reproduction autorisée

**7.** Démontrez que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, sachant ceci.

**que $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont parallèles**

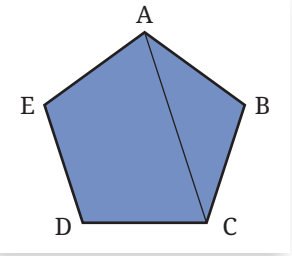
**que m∠DBC = m∠BDA**

**que m∠CAD = m∠BCA**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠BDC = m∠DBA | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| m∠DBC = m∠BDA | On se base sur les données du problème. |
| m∠ADC = m∠ABC | Ils sont formés par des angles isométriques (étapes 1 et 2). |
| m∠CAB = m∠ACD | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| m∠CAD = m∠BCA | On se base sur les données du problème. |
| m∠ACD = m∠BAD | Ils sont formés par des angles isométriques (étapes 4 et 5). |
| ABCD est un parallélogramme. | Un parallélogramme possède deux paires d'angles opposés isométriques. |

★★ **8.** Sachant que le pentagone ABCDE est régulier, calculez la mesure de ∠BAC.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠ABC = 108° | Dans un pentagone, tous les angles valent 108°. $\frac{180(□ - 2)}{□} = \frac{180(5 - 2)}{5} = \frac{180(3)}{5} = \frac{540}{5} = 108°$ |
| $m\overline{AB} = m\overline{BC}$ | Dans un pentagone régulier, tous les côtés ont la même mesure. |
| ΔABC est isocèle. | Un triangle ayant deux côtés isométriques est isocèle. |
| m∠BAC = m∠BCA | Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques. |
| m∠BAC = 36° | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $\frac{180 - 108}{2} = \frac{72}{2} = 36°$. |

# 5.2 LES TRIANGLES SEMBLABLES

## Déterminer les conditions minimales de similitude des triangles

Des triangles sont semblables si leurs angles sont isométriques et que leurs côtés homologues sont proportionnels. Puisqu'on utilise la notion de proportionnalité, le rapport de similitude ($k$) est le même pour les trois paires de côtés homologues.

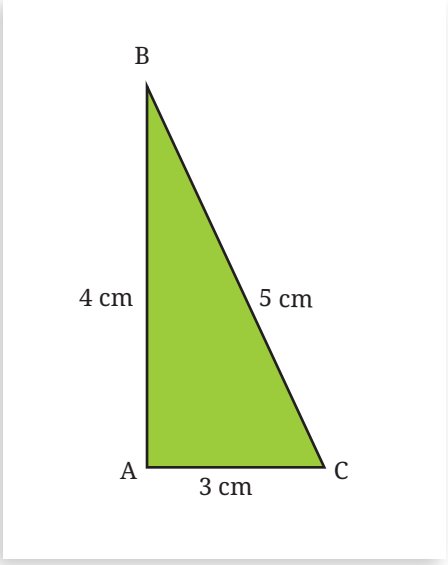
On utilise le symbole « ~ » pour indiquer que deux triangles sont semblables.

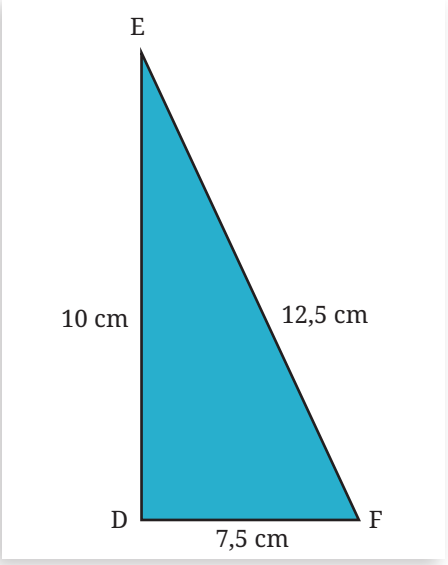
Pour déterminer si deux triangles sont semblables, il n'est pas nécessaire de connaître toutes les mesures de ces figures. Il existe trois conditions minimales de similitude : lorsque l'une d'elles est respectée, il est certain que les deux triangles sont semblables. Voici ces trois conditions.

### 1. Cas CCC

Deux triangles possédant trois paires de côtés homologues proportionnels sont nécessairement semblables.

On utilise l'abréviation CCC (côté, côté, côté) pour représenter cette condition.




$$k = \frac{\text{m}\overline{\text{DE}}}{\text{m}\overline{\text{AB}}} = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

$$k = \frac{\text{m}\overline{\text{DF}}}{\text{m}\overline{\text{AC}}} = \frac{7{,}5}{3} = 2{,}5$$

$$k = \frac{\text{m}\overline{\text{EF}}}{\text{m}\overline{\text{BC}}} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$$

Puisque le rapport de similitude est le même pour les trois paires de côtés homologues, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ selon la propriété CCC.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

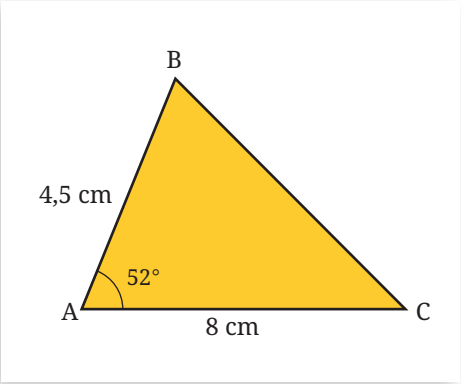
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

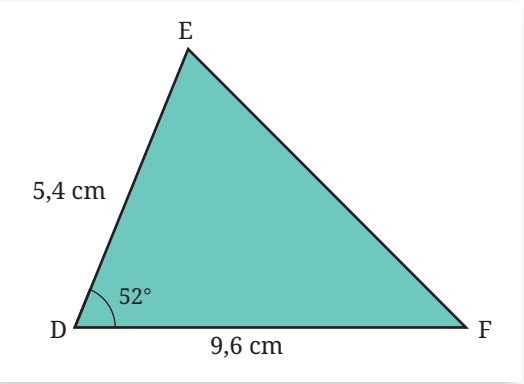
## 2. Cas CAC

Deux triangles possédant une paire d'angles homologues isométriques compris entre deux paires de côtés homologues proportionnels sont semblables.

On utilise l'abréviation CAC (côté, angle, côté) pour représenter cette condition.

*L'angle doit absolument être compris entre les deux côtés.




$$k = \frac{\text{m}\overline{DE}}{\text{m}\overline{AB}} = \frac{5,4}{4,5} = 1,2$$

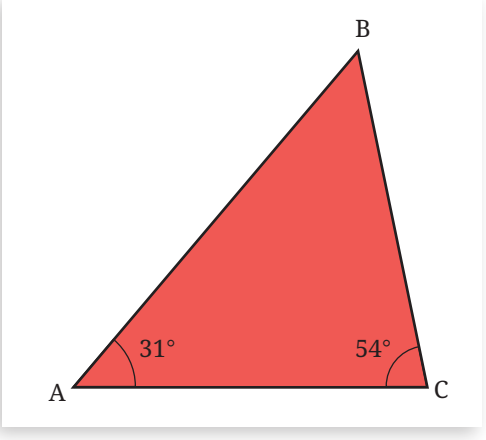
$$k = \frac{\text{m}\overline{DF}}{\text{m}\overline{AC}} = \frac{9,6}{8} = 1,2$$

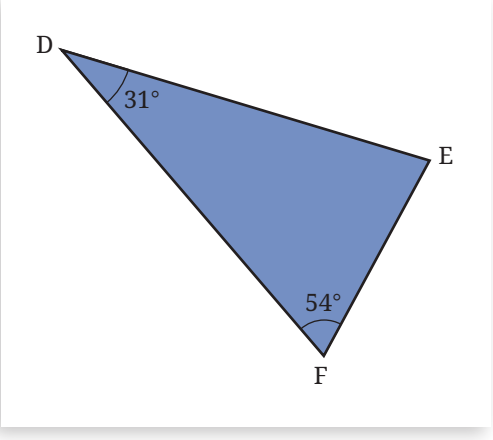
$\text{m}\angle BAC = \text{m}\angle EDF$ (selon une donnée du problème)
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (selon la propriété CAC)

## 3. Cas AA

Deux triangles possédant deux paires d'angles homologues isométriques sont nécessairement semblables.

On utilise l'abréviation AA (angle, angle) pour représenter cette condition.



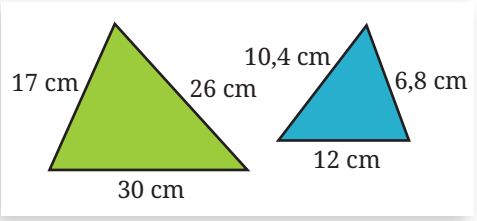




$\text{m}\angle BAC = \text{m}\angle EDF$ (selon une donnée du problème)
$\text{m}\angle ACB = \text{m}\angle DFE$ (selon une donnée du problème)
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (selon la propriété AA)

# EXERCICES

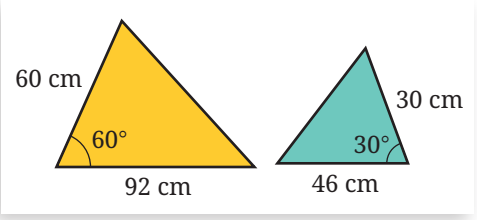
★**1.** Déterminez si les paires de triangles suivants sont semblables. Si oui, précisez selon quelle condition minimale elles le sont et quel est le rapport de similitude, si possible.

**a**



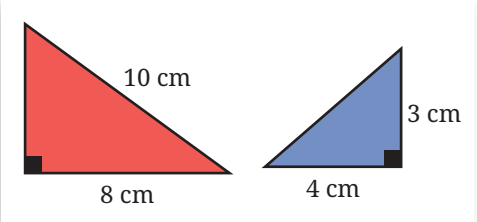

Les triangles sont semblables selon CCC et le rapport de similitude est 2,5.

**b**



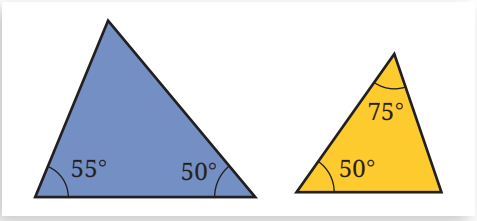

Les triangles ne sont pas semblables et il n'y a aucun cas de similitude.

**c**



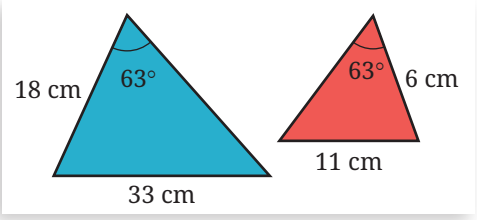

Les triangles sont semblables selon CCC et CAC, et le rapport de similitude est 2.

**d**



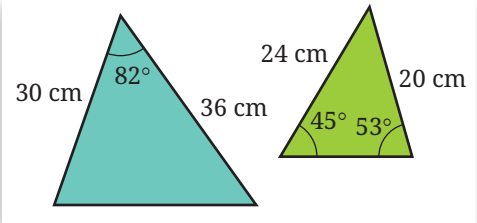

Les triangles sont semblables selon AA et il est impossible de trouver le rapport de similitude.

**e**




Les triangles ne sont pas semblables et il n'y a aucun cas de similitude.

**f**




Les triangles sont semblables selon CAC et le rapport de similitude est 1,5.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**2.** Déterminez si les triangles suivants sont nécessairement semblables. Si oui, indiquez quelle condition minimale de similitude est respectée. Vous pouvez représenter les triangles pour vous aider.

**a** Deux triangles isocèles

**RÉPONSE** Non.

**b** Deux triangles dont l'un a un côté de 8 cm et dont l'autre a un côté de 5 cm, et qui ont tous les deux des angles de 40° et de 50°

**RÉPONSE** Oui, selon AA.

**c** Deux triangles ayant deux côtés mesurant 6 cm et 7 cm et un angle de 94°

**RÉPONSE** Non.

**d** Deux triangles formés par la diagonale d'un losange

**RÉPONSE** Oui, selon CCC, CAC et AA.

**e** Deux triangles rectangles dont l'un a des cathètes mesurant 12 cm et 15 cm et dont l'autre a des cathètes mesurant 9 cm et 11,25 cm

**RÉPONSE** Oui, selon CCC et CAC.

**f** Deux triangles équilatéraux

**RÉPONSE** Oui, selon AA, CCC et CAC.

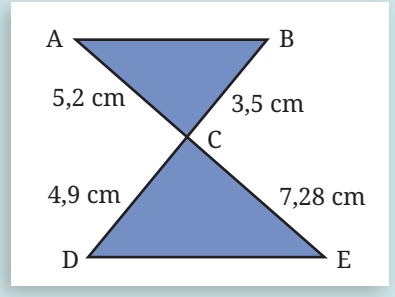
## Utiliser les triangles semblables dans les preuves

Pour structurer la démarche en fonction de l'une des trois conditions de similitude, les mathématiciens et mathématiciennes se sont entendus sur la présentation des preuves en deux colonnes. Ainsi, les preuves servent à démontrer si des angles sont isométriques ou si des côtés homologues sont proportionnels de sorte à satisfaire à l'une des trois conditions de similitude.

Il est important de bien démontrer chaque information dans les preuves, même si les figures fournissent certaines données. Ainsi, si on veut se baser sur la condition CCC, on doit mentionner en guise de justification le fait que deux triangles ont trois paires de côtés homologues proportionnels.

**EXEMPLE**

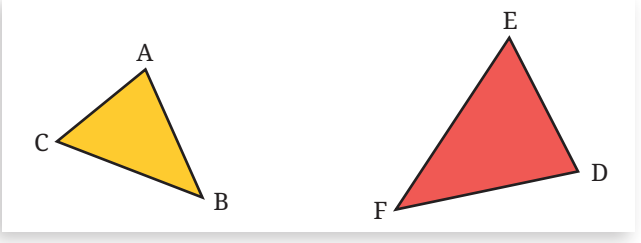
**Démontrer que les triangles ABC et CDE sont semblables dans la figure ci-contre.**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BCA = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\frac{m\overline{CE}}{m\overline{AC}} = \frac{7{,}28\text{ cm}}{5{,}2\text{ cm}} = 1{,}4$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{CD}}{m\overline{BC}} = \frac{4{,}9\text{ cm}}{3{,}5\text{ cm}} = 1{,}4$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition CAC. |

## EXERCICES

★**1.** Déterminez les paires de côtés homologues des triangles semblables suivants.

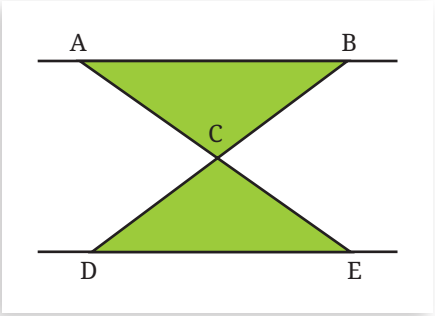



Les côtés homologues sont $\overline{ED}$ et $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ et $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ et $\overline{BC}$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

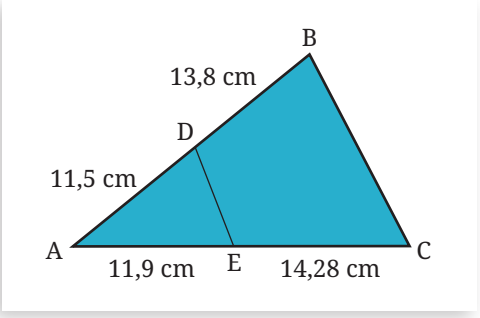
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**2.** Démontrez que les triangles ABC et CDE sont semblables, sachant que $\overline{AB}$ et $\overline{DE}$ sont parallèles.



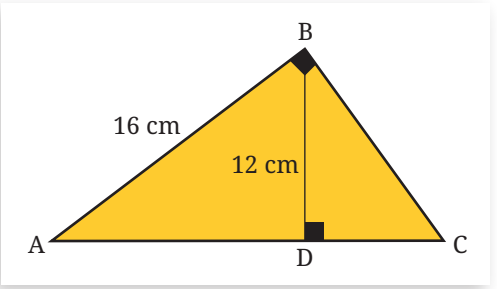

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $m\angle CAB = m\angle CED$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition AA. |

★**3.** Démontrez que les triangles ABC et ADE sont semblables.



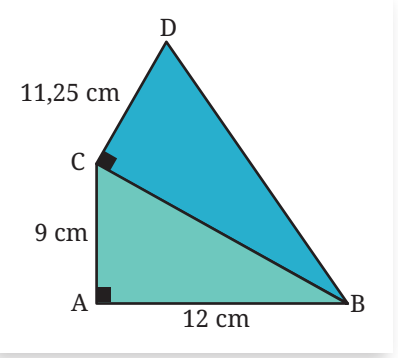

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BAC = m\angle DAE$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \frac{11,5 + 13,8}{11,5} = \frac{25,3\text{ cm}}{11,5\text{ cm}} = 2,2$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{AE}} = \frac{11,9 + 14,28}{11,9} = \frac{26,18\text{ cm}}{11,9\text{ cm}} = 2,2$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ | Ils respectent la condition CAC. |

★4. Démontrez que les triangles ABC et ABD sont semblables.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠BAD = m∠BAC | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| m∠BDA = 90° | Il est supplémentaire avec ∠BDC, et 180 – 90 = 90°. |
| m∠ABC = m∠BDA | On se base sur une donnée du problème et sur l'étape 2. |
| ΔABC ~ ΔABD | Ils respectent la condition AA. |

★★5. Démontrez que les triangles ABC et BCD sont semblables.

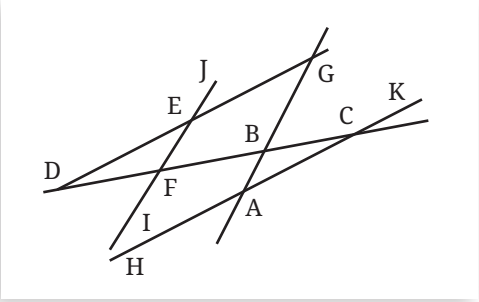



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| m∠BAC = m∠BCD | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\overline{BC} = 15$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$9^2 + 12^2 = c^2$<br>$81 + 144 = c^2$<br>$225 = c^2$<br>$15 \text{ cm} = c$ |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{BC}} = \frac{12 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 0{,}8$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{CD}} = \frac{9 \text{ cm}}{11{,}25 \text{ cm}} = 0{,}8$ | Ce sont des côtés homologues. |
| ΔABC ~ ΔBCD | Ils respectent la condition CAC. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

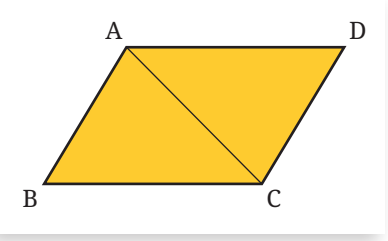
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**6.** Démontrez que les triangles ABC et DEF sont semblables, sachant que $\overline{DG} \parallel \overline{HK}$ et que $\overline{IJ} \parallel \overline{AG}$.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle DFE = m\angle ABC$ | Ce sont des angles alternes-externes formés par des parallèles et une sécante. |
| $m\angle ACB = m\angle FDE$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ | Ils respectent la condition AA. |

★★**7.** Démontrez que les triangles ABC et ACD sont semblables, sachant que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ABC = m\angle ADC$ | Dans un parallélogramme, les angles opposés sont isométriques. |
| $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ | Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont isométriques. |
| $m\overline{BC} = m\overline{AD}$ | Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont isométriques. |
| $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ | Ils respectent la condition CAC. |

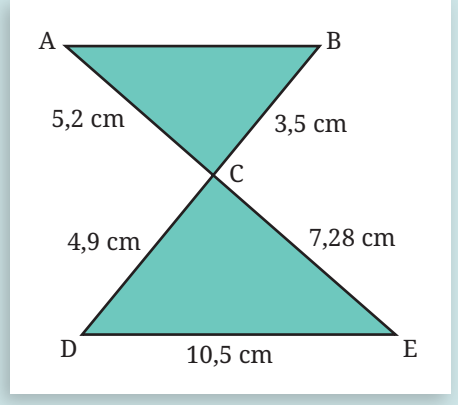
## Trouver des mesures manquantes à l'aide des triangles semblables

Il est pratique de savoir reconnaître des triangles semblables, mais il est encore plus utile de les utiliser afin de trouver des mesures manquantes. En effet, certaines mesures sont parfois inconnues, mais on peut les déduire à l'aide de triangles semblables.

Pour ce faire, il faut d'abord démontrer que les triangles sont semblables avant d'utiliser les propriétés des triangles semblables pour trouver une mesure manquante.

**EXEMPLE**

**Soit l'exemple du dernier encadré théorique.**
**Déterminer la mesure de $\overline{AB}$ dans la figure suivante.**



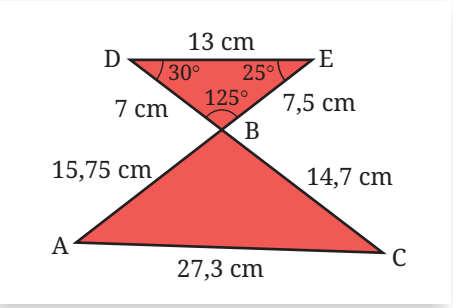

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BCA = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\frac{m\overline{CE}}{m\overline{AC}} = \frac{7{,}28\text{ cm}}{5{,}2\text{ cm}} = 1{,}4$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{CD}}{m\overline{BC}} = \frac{4{,}9\text{ cm}}{3{,}5\text{ cm}} = 1{,}4$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition CAC. |
| $\frac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = k$<br>$\frac{10{,}5}{m\overline{AB}} = 1{,}4$<br>$m\overline{AB} = \frac{10{,}5}{1{,}4}$<br>$m\overline{AB} = 7{,}5\text{ cm}$ | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

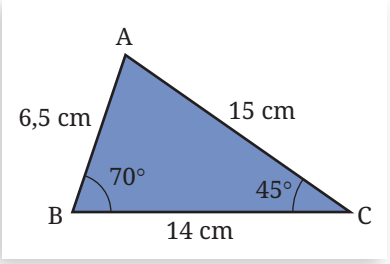
## EXERCICES

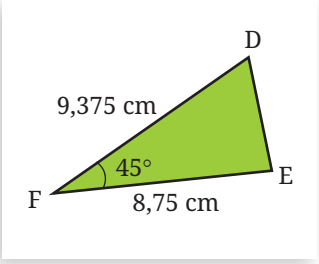
**★★1.** Quelle est la mesure de l'angle BAC dans la figure ci-contre ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ABC = m\angle DBE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{BE}} = \frac{15,75}{7,5} = 2,1$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{BC}}{m\overline{BD}} = \frac{14,7}{7} = 2,1$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\Delta ABC \sim \Delta BDE$ | Ils respectent la condition CAC. |
| $m\angle BAC = m\angle DEB = 25°$ | Ce sont des angles homologues de triangles semblables. |

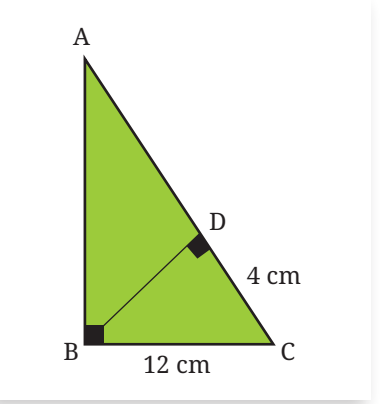
**★★2.** Quelle est la mesure de $\overline{DE}$ dans la figure ci-contre ?



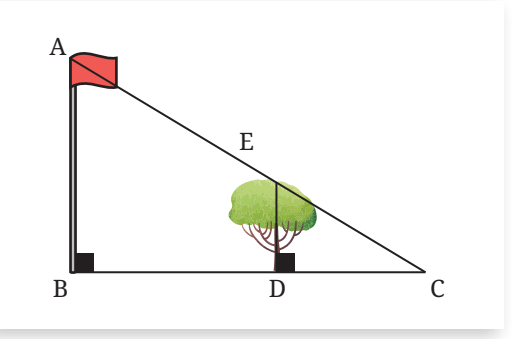

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = m\angle DFE$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\frac{m\overline{BC}}{m\overline{EF}} = \frac{14}{8,75} = 1,6$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\frac{m\overline{AC}}{m\overline{DF}} = \frac{15}{9,375} = 1,6$ | Ce sont des côtés homologues. |
| $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ | Ils respectent la condition CAC. |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{DE}} = k$<br>$\frac{6,5}{m\overline{DE}} = 1,6$<br>$m\overline{DE} = \frac{6,5}{1,6}$<br>$m\overline{DE} \approx 4,06$ cm | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

★★**3.** Quelle est la mesure de $\overline{AC}$ dans la figure ci-contre ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = m\angle DCB$ | Il s'agit d'angles communs aux deux triangles. |
| $m\angle ABC = m\angle BDC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABC \sim \Delta BDC$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{CD}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{AC}}$<br>$\frac{4}{12} = \frac{12}{m\overline{AC}}$<br>$m\overline{AC} = \frac{12 \cdot 12}{4}$<br>$m\overline{AC} = 36$ cm | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

★★**4.** Antoine se trouve devant un drapeau dont l'ombre coïncide parfaitement avec celle d'un arbre. Plantée tout près, une plaque indique que l'arbre mesure 185 cm. S'il se situe à 60 m du drapeau et à 5 m de l'extrémité de l'ombre, quelle est la hauteur du drapeau ?

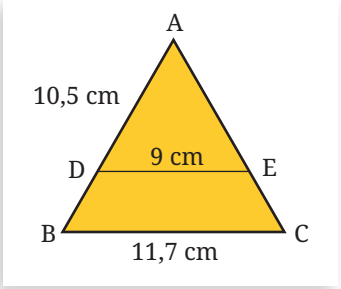



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = m\angle ECD$ | Il s'agit d'un angle commun aux deux triangles. |
| $m\angle ABC = m\angle EDC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{DE}}{m\overline{AB}} = \frac{m\overline{CD}}{m\overline{BC}}$<br>$\frac{1{,}85}{m\overline{AB}} = \frac{5}{65}$<br>$m\overline{AB} = \frac{1{,}85 \cdot 65}{5}$<br>$m\overline{AB} = 24{,}05$ m | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

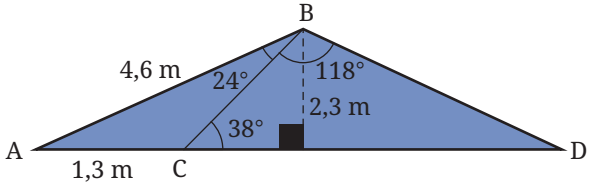
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**5.** Dans la représentation ci-contre, quelle est la mesure de $\overline{BD}$ si $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ADE = m\angle ABC$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $m\angle AED = m\angle ACB$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{DE}}$ $\frac{m\overline{AB}}{10,5} = \frac{11,7}{9}$ $m\overline{AB} = \frac{10,5 \cdot 11,7}{9}$ $m\overline{AB} = 13,65$ cm | Ce sont des paires de côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |
| $m\overline{BD} = 3,15$ cm | $m\overline{BD} = m\overline{AB} - m\overline{AD}$ |

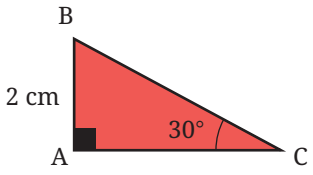
★★★**6.** Quelle est l'aire de la figure ci-contre ?



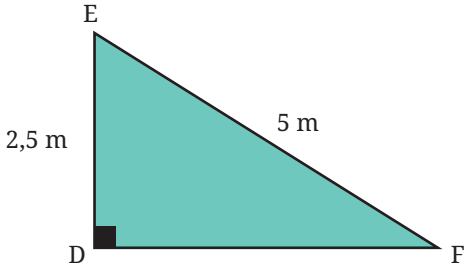

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BCA = 142°$ | Il est supplémentaire avec $\angle BCD$, et $180 - 38 = 142°$. |
| $m\angle BDC = 24°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et $180 - 118 - 38 = 24°$. |
| $m\angle ABD = 142°$ | Il est constitué des angles ABC et CBD, et $118 + 24 = 142°$. |
| $m\angle ABD = m\angle BCA$ | On se base sur les étapes 1 et 3. |
| $m\angle BDC = m\angle ABC$ | On se base sur une donnée du problème et sur l'étape 2. |
| $\Delta ABC \sim \Delta ABD$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AD}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{AB}}$ $\frac{4,6}{m\overline{AD}} = \frac{1,3}{4,6}$ $m\overline{AD} = \frac{4,6 \cdot 4,6}{1,3}$ $m\overline{AD} \approx 16,28$ m | Ce sont des paires de côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |
| Aire du $\Delta ABD \approx 18,72$ m$^2$ | La formule de l'aire d'un triangle est $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{16,28 \cdot 2,3}{2} = 18,72$ m$^2$. |

★★ **7.** Louve travaille comme ouvrière sur un chantier de construction. Hier, elle a vu le plan de la structure qu'elle doit monter. Il lui faudra installer une clôture tout le tour de la structure lorsque celle-ci sera montée. Aujourd'hui, lorsqu'elle prend les mesures réelles, Louve a l'impression que les dimensions de la structure ne sont pas proportionnelles à celles du plan (voir dessins). Elle n'ose pas poser la clôture de 15 m qu'elle a reçue de crainte de ne pas en avoir assez. Démontrez à Louve que la structure respecte le plan et calculez la longueur nécessaire de clôture.

**Plan**




**Structure**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BAC = m\angle EDF$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle EFD = 30°$ | Dans un triangle rectangle, l'angle opposé à une cathète mesurant la moitié de l'hypoténuse est de 30°, et $\frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$. |
| $m\angle ACB = m\angle EFD$ | On se base sur une donnée du problème et sur l'étape 2. |
| $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ | Ils respectent la condition AA. |
| $m\overline{DF} = 13,65$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$2,5^2 + b^2 = 5^2$<br>$6,25 + b^2 = 25$<br>$b^2 = 18,75$<br>$b \approx 4,33$ cm |
| Longueur de la clôture = 11,83 m | Le périmètre correspond à la somme des mesures des côtés d'une figure, et 4,33 + 2,5 + 5 = 11,83 m. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# 5.3 LES TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

## Déterminer les conditions minimales d'isométrie des triangles

Des triangles isométriques sont des triangles semblables dont le rapport de similitude ($k$) vaut 1. Ainsi, les triangles isométriques sont identiques. Leurs angles et leurs côtés homologues sont isométriques.

On utilise le symbole «≅» pour indiquer que deux triangles sont isométriques.

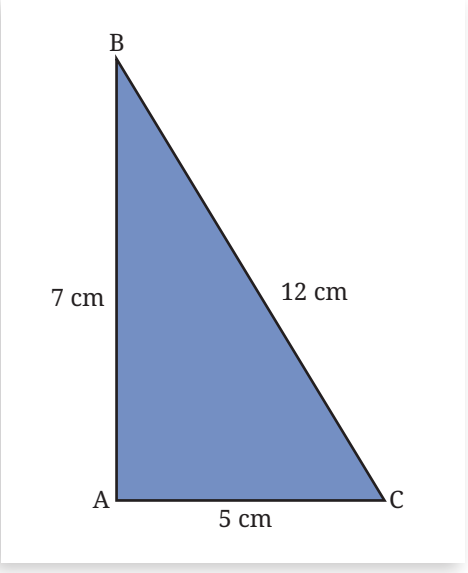
Tout comme pour les triangles semblables, il existe trois conditions minimales permettant de déterminer si deux triangles sont isométriques.

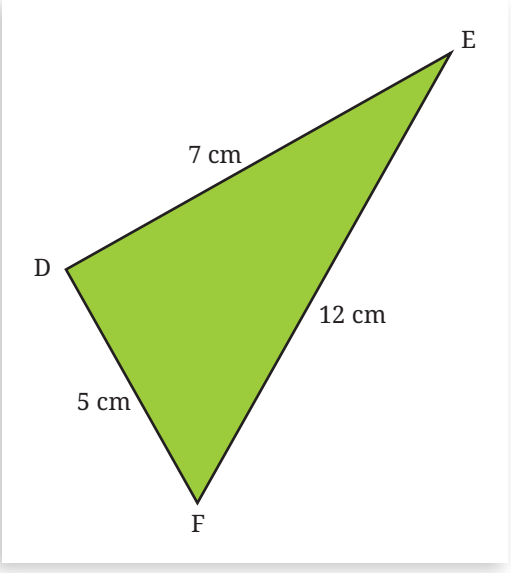
Voici ces trois conditions.

### 1. Cas CCC

Deux triangles possédant trois paires de côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques.

On utilise l'abréviation CCC (côté, côté, côté) pour représenter cette condition.




$$m\overline{AB} = m\overline{DE} = 7 \text{ cm}$$
$$m\overline{AC} = m\overline{DF} = 5 \text{ cm}$$
$$m\overline{BC} = m\overline{EF} = 12 \text{ cm}$$

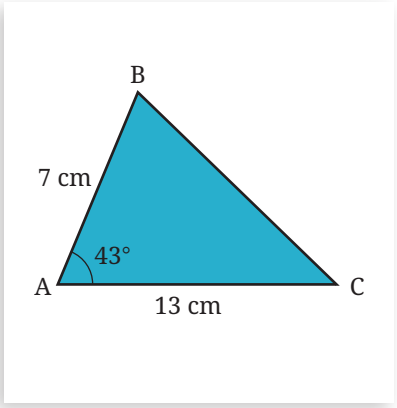
Puisque les côtés homologues sont isométriques, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ selon la propriété CCC.

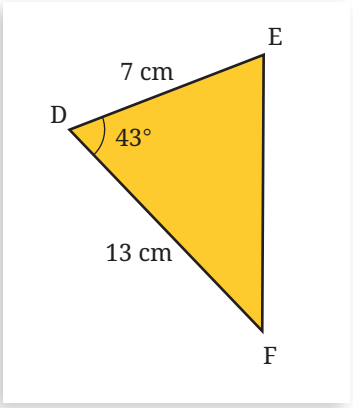
## 2. Cas CAC

Deux triangles possédant une paire d'angles homologues isométriques compris entre deux paires de côtés homologues isométriques sont isométriques.

On utilise l'abréviation CAC (côté, angle, côté) pour représenter cette condition.

*L'angle doit absolument être compris entre les deux côtés.




$m\overline{AB} = m\overline{DE} = 7$ cm
$m\overline{AC} = m\overline{DF} = 13$ cm
$m\angle BAC = m\angle EDF$

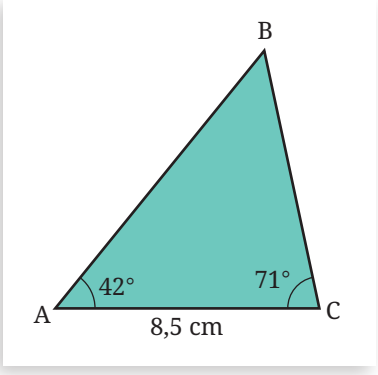
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (selon la propriété CAC)

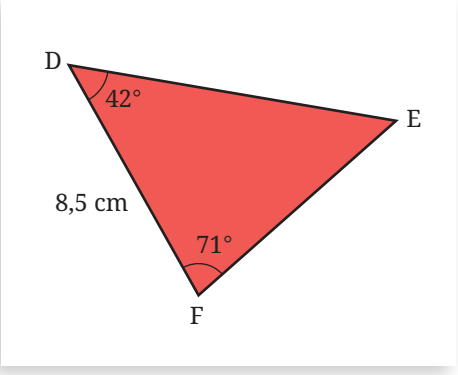
## 3. Cas ACA

Deux triangles possédant une paire de côtés homologues isométriques compris entre deux paires d'angles homologues isométriques sont nécessairement isométriques.

On utilise l'abréviation ACA (angle, côté, angle) pour représenter cette condition.

*Le côté doit absolument se trouver entre les deux angles.




$m\angle BAC = m\angle EDF$
$m\angle ACB = m\angle DFE$
$m\overline{AC} = m\overline{DF} = 8{,}5$ cm

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (selon la propriété ACA)

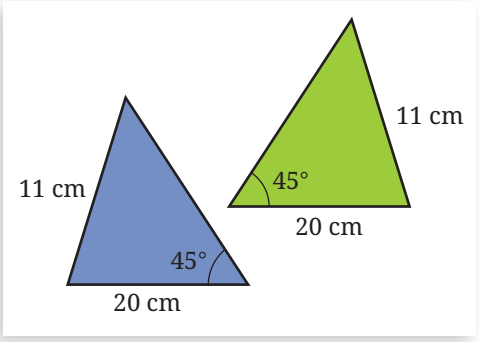
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## EXERCICES

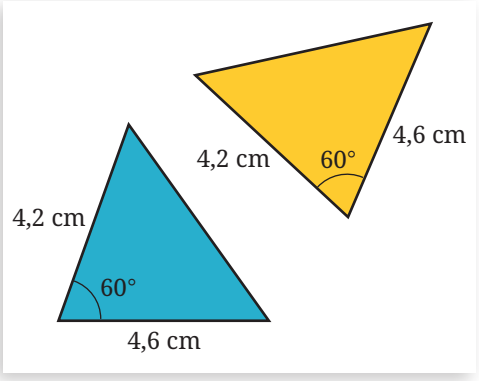
★1. Déterminez si les paires de triangles suivants sont isométriques. Si oui, précisez selon quelle condition minimale elles le sont.

**a**



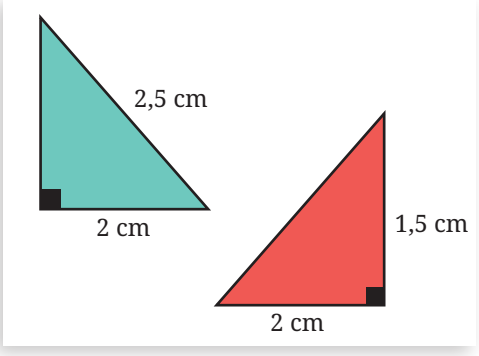

Non, aucun cas d'isométrie.

**b**



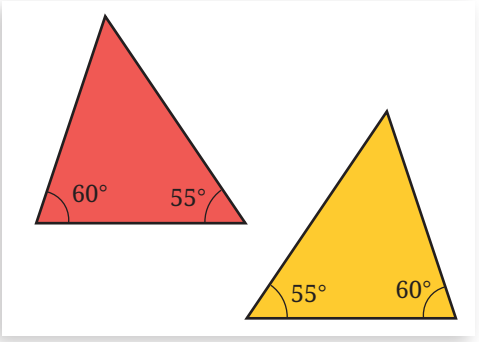

Oui, selon CAC.

**c**



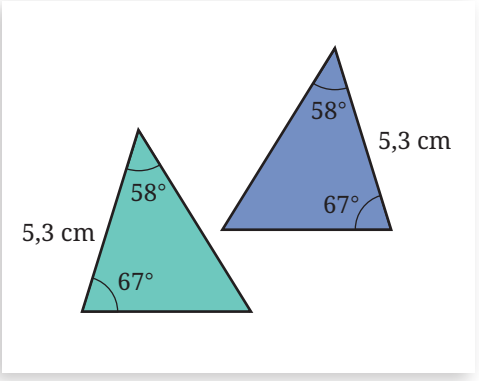

Oui, selon CCC et CAC.

**d**



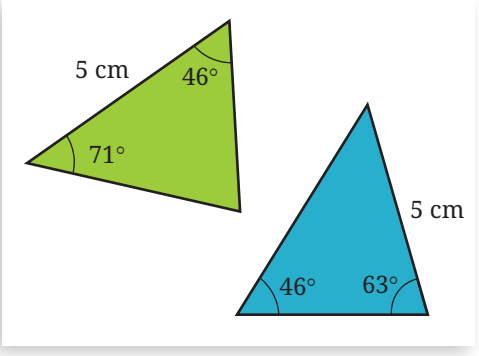

Non, aucun cas d'isométrie.

**e**




Oui, selon ACA.

**f**




Non, aucun cas d'isométrie.

★★**2.** Déterminez si les triangles suivants sont nécessairement isométriques. Si oui, indiquez quelle condition minimale d'isométrie est respectée. Vous pouvez représenter les triangles pour vous aider.

**a** Deux triangles équilatéraux

**RÉPONSE** Non.

**b** Deux triangles ayant chacun un côté de 7,1 cm compris entre des angles de 62° et de 81°

**RÉPONSE** Oui, selon ACA.

**c** Deux triangles ayant des angles de 65° et de 54° et un côté de 7 cm

**RÉPONSE** Non.

**d** Deux triangles formés par la diagonale d'un rectangle

**RÉPONSE** Oui, selon CCC, CAC et ACA.

**e** Deux triangles dont l'un possède des côtés de 5,8 cm et de 12 cm et dont l'autre possède des côtés de 5 cm et de 8 cm formant un angle de 62°

**RÉPONSE** Non.

**f** Deux triangles rectangles isocèles possédant deux côtés de 13 cm

**RÉPONSE** Oui, selon ACA, CCC et CAC.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

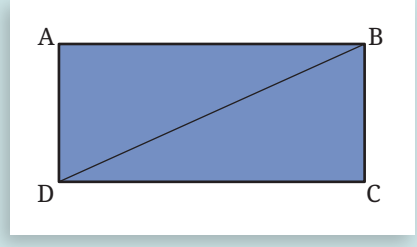
## Utiliser les triangles semblables dans les preuves

Les triangles semblables peuvent également servir à prouver que des angles ou des côtés homologues sont isométriques de sorte à satisfaire à l'une des trois conditions d'isométrie.

Il est important de bien démontrer chaque information dans les preuves, même si les figures fournissent certaines données. Ainsi, si on veut se baser sur la condition CCC, on doit mentionner en guise de justification qu'il y a trois paires de côtés homologues isométriques.

**EXEMPLE**

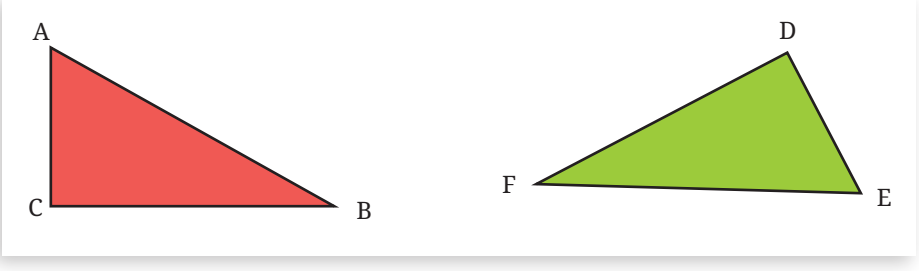
**Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isométriques dans le rectangle ci-contre.**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{BD} = m\overline{BD}$ | C'est un côté commun aux deux triangles. |
| $m\overline{AD} = m\overline{BC}$ | Dans un rectangle, les côtés opposés sont isométriques. |
| $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ | Dans un rectangle, les côtés opposés sont isométriques. |
| $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ | Ils respectent la condition CCC. |

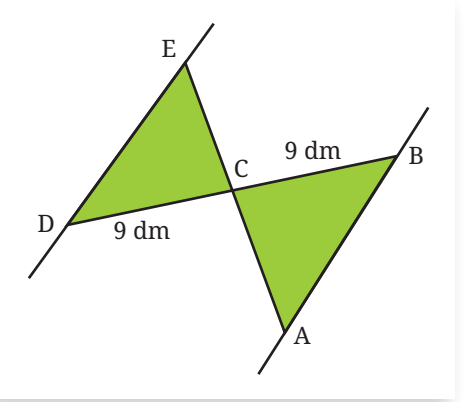
## EXERCICES

★**1.** Déterminez les paires de côtés homologues des triangles isométriques suivants.



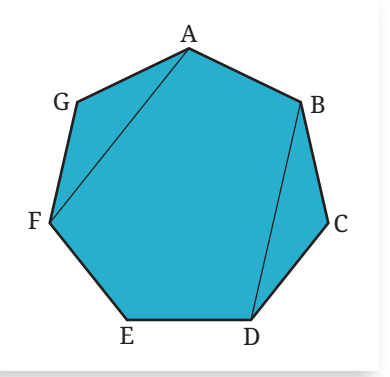

Les côtés homologues sont $\overline{EF}$ et $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ et $\overline{AC}$, $\overline{DF}$ et $\overline{BC}$.

★★**2.** Démontrez que les triangles ABC et CDE sont isométriques dans la figure ci-contre, sachant que $\overline{AB}$ et $\overline{DE}$ sont parallèles.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{CD} = m\overline{BC}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ACB = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $m\angle ABC = m\angle EDC$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ | Ils respectent la condition ACA. |

★★**3.** Démontrez que les triangles BCD et AFG sont isométriques dans l'heptagone régulier ABCDEFG.

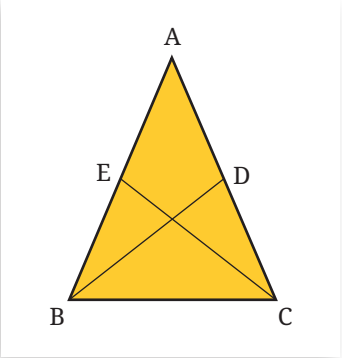



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{AG} = m\overline{BC}$ | Dans un polygone régulier, tous les côtés sont isométriques. |
| $m\overline{FG} = m\overline{CD}$ | Dans un polygone régulier, tous les côtés sont isométriques. |
| $m\angle AGF = m\angle BCD$ | Dans un polygone régulier, tous les angles sont isométriques. |
| $\Delta BCD \cong \Delta AFG$ | Ils respectent la condition CAC. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

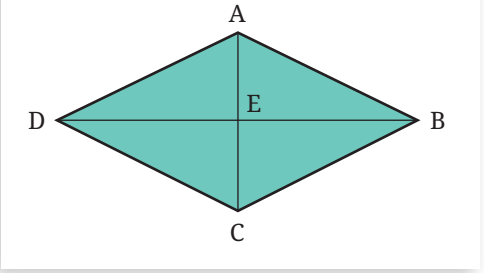
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**4.** Dans la figure ci-contre, ΔABC est isocèle. Si $\overline{EC}$ et $\overline{BD}$ sont les médianes des côtés isométriques, démontrez que les triangles BCD et BCE sont isométriques.



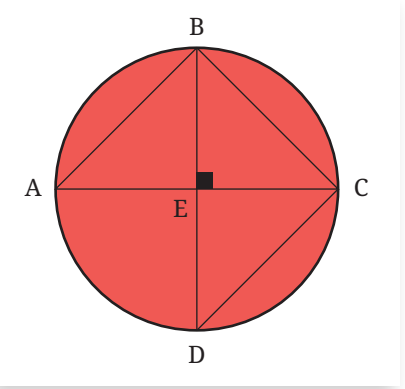

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{BC} = m\overline{BC}$ | C'est un côté commun aux deux triangles. |
| $m\overline{AB} = m\overline{AC}$ | Ce sont les côtés isométriques du triangle isocèle. |
| $m\overline{BE} = m\overline{CD}$ | Une médiane coupe un segment en son milieu, et la moitié des segments isométriques donne des segments isométriques. |
| $m\angle EBC = m\angle DCB$ | Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques. |
| $\Delta BCD \cong \Delta BCE$ | Ils respectent la condition CAC. |

★★**5.** Démontrez que les triangles ABE et CDE sont isométriques dans le losange ci-contre.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{DE} = m\overline{EB}$ | Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu. |
| $m\overline{AE} = m\overline{CE}$ | Dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu. |
| $m\angle AEB = m\angle DEC$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ | Ils respectent la condition CAC. |

★★ **6.** Sachant que le diamètre du cercle ci-contre mesure 6 cm, démontrez que les triangles ABC et BCD sont isométriques.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{BC} = m\overline{BC}$ | C'est un côté commun aux deux triangles. |
| $m\overline{AC} = m\overline{BD}$ | Dans un cercle, tous les diamètres sont isométriques. |
| $m\overline{BE} = m\overline{AE} = m\overline{CE}$ $= m\overline{DE} = 3$ cm | Dans un cercle, les rayons sont tous isométriques et mesurent la moitié du diamètre, et $\frac{6}{2} = 3$ cm. |
| $m\overline{AB} \approx 4{,}24$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$3^2 + 3^2 = c^2$<br>$9 + 9 = c^2$<br>$18 = c^2$<br>$4{,}24 \text{ cm} \approx c$ |
| $m\overline{CD} \approx 4{,}24$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$3^2 + 3^2 = c^2$<br>$9 + 9 = c^2$<br>$18 = c^2$<br>$4{,}24 \text{ cm} \approx c$ |
| $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ | On se base sur les étapes 4 et 5. |
| $\Delta ABC \cong \Delta BCD$ | Ils respectent la condition CCC. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

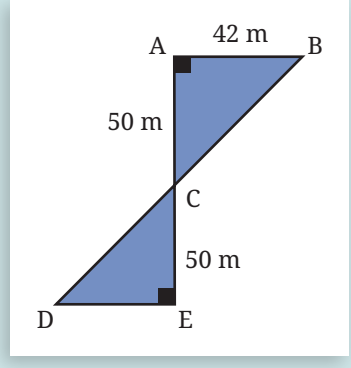
## Trouver des mesures manquantes à l'aide des triangles isométriques

Tout comme pour les triangles semblables, l'utilité première des triangles isométriques est de trouver des mesures manquantes.

Pour ce faire, il faut d'abord démontrer que les triangles sont isométriques avant d'utiliser les propriétés des triangles isométriques pour trouver une mesure manquante.

**EXEMPLE**

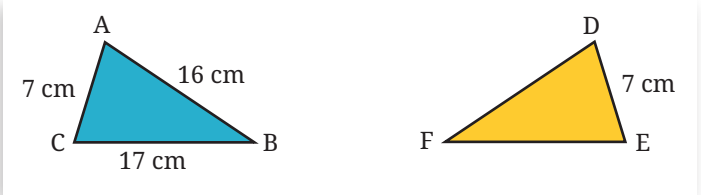
**Déterminer la mesure de $\overline{DE}$ dans la figure ci-contre.**




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BCA = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $m\angle CAB = m\angle DEC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\overline{AC} = m\overline{CE}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ | Ils respectent la condition ACA. |
| $m\overline{DE} = m\overline{AB} = 42$ m | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |

## EXERCICES

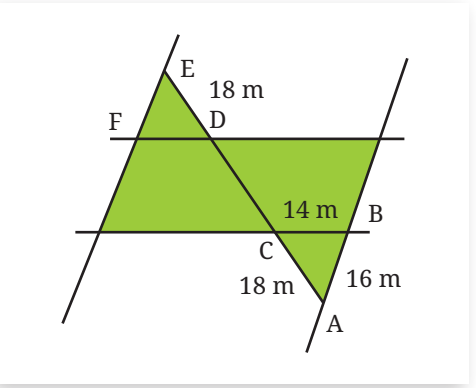
★1. Sachant que les triangles ci-dessous sont isométriques, déduisez la mesure de $\overline{FE}$.




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{FE} = m\overline{BC} = 17$ cm | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |
| | |
| | |

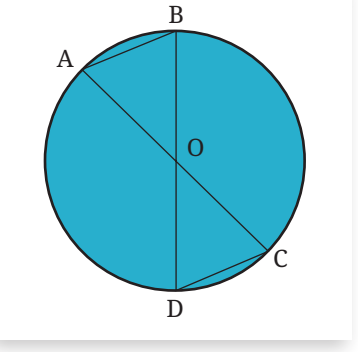
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Dans la figure ci-contre, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ et $\overline{BC} \parallel \overline{DF}$. Quelle est la mesure de $\overline{DF}$ ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle EDF = m\angle ACB$ | Ce sont des angles alternes-externes formés par des parallèles et une sécante. |
| $m\angle FED = m\angle CAB$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante. |
| $m\overline{AC} = m\overline{DE}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ | Ils respectent la condition ACA. |
| $m\overline{DF} = m\overline{BC} = 14$ m | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |

★★**3.** Dans le cercle de centre O ci-contre, $\overline{AB}$ mesure 3 cm et $\overline{BO}$ 5 cm. Quelle est la mesure de $\overline{CD}$ ?

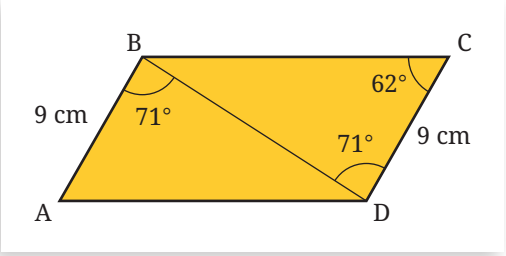



| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\overline{AO} = m\overline{CO}$ | Dans un cercle, tous les rayons sont isométriques. |
| $m\overline{BO} = m\overline{DO}$ | Dans un cercle, tous les rayons sont isométriques. |
| $m\angle AOB = m\angle COD$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\Delta ABO \cong \Delta CDO$ | Ils respectent la condition CAC. |
| $m\overline{CD} = m\overline{AB} = 3$ cm | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

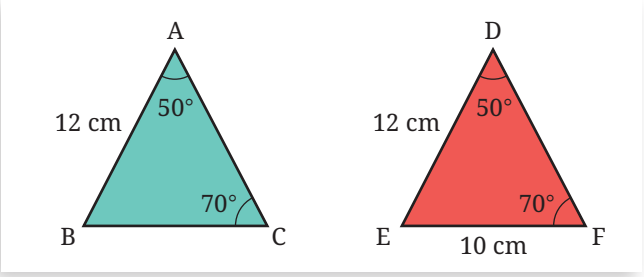
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**4.** Dans la figure ci-contre, quelle est la mesure de l'angle BDA ?



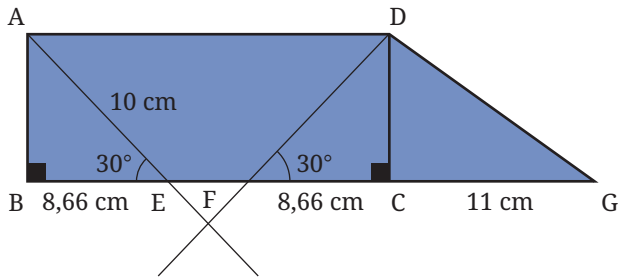

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ABD = m\angle BDC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\overline{BD} = m\overline{BD}$ | Ce côté est commun aux deux triangles. |
| $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ | Ils respectent la condition CAC. |
| $m\angle CBD = 47°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°, et 180 – 71 – 62 = 47°. |
| $m\angle BDA = m\angle CBD = 47°$ | Ce sont des angles homologues de triangles isométriques. |

★★**5.** Quelle est la mesure de $\overline{BC}$ dans la figure ci-contre ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BCA = m\angle EFD$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle CAB = m\angle EDF$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\overline{AB} = m\overline{DE}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ABC = m\angle DEF$ | Puisque les deux triangles ont déjà deux angles isométriques, la troisième paire d'angles est nécessairement isométrique : la somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à 180°. |
| $\Delta ABD \cong \Delta BCD$ | Ils respectent la condition ACA. |
| $m\overline{BC} = m\overline{EF} = 10$ cm | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |

★★ **6.** Dans la figure suivante, quelle est la mesure de $\overline{DG}$ ?



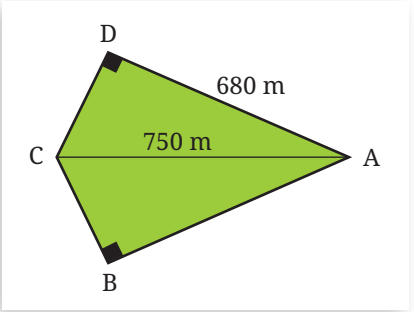

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle AEB = m\angle DFC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ABE = m\angle DCF$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\overline{BE} = m\overline{CF}$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta ABE \cong \Delta CDF$ | Ils respectent la condition ACA. |
| $m\overline{AB} = 5$ cm | Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse. |
| $m\overline{CD} = m\overline{AB} = 5$ cm | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |
| $m\overline{DG} \approx 12{,}08$ cm | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$11^2 + 5^2 = c^2$<br>$121 + 25 = c^2$<br>$146 = c^2$<br>$12{,}08 \text{ cm} \approx c$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★ **7.** Malec vient d'hériter de la terre de ses parents, laquelle est représentée par le quadrilatère ABCD ci-contre. Toutefois, il doit la séparer avec sa sœur Rym, avec qui il décide de la diviser en deux lots à l'aide du segment AC. Malec a calculé que $\overline{AC}$ était la bissectrice de l'angle DAB.



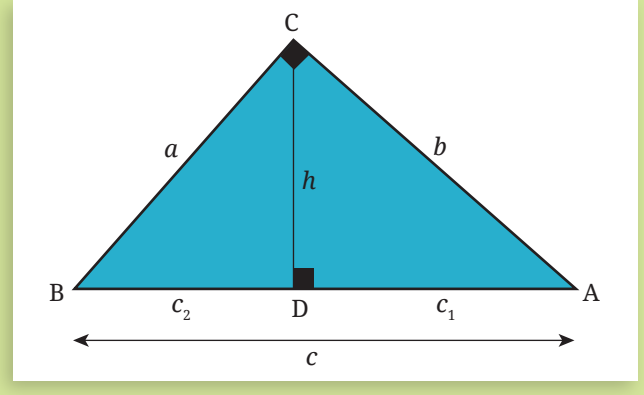

Afin d'éviter que les chevaux qu'il souhaite se procurer se sauvent, Malec veut faire clôturer son lot (ΔABC). Quelle sera la longueur totale de la clôture ?

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle DAC = m\angle BAC$ | Une bissectrice sépare un angle en deux angles isométriques. |
| $m\angle ADC = m\angle ABC$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ACD = m\angle ACB$ | Puisque les deux triangles ont déjà deux angles isométriques, la troisième paire d'angles est nécessairement isométrique : la somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à 180°. |
| $m\overline{AC} = m\overline{AC}$ | Ce côté est commun aux deux triangles. |
| $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ | Ils respectent la condition ACA. |
| $m\overline{AB} = m\overline{AD} = 680$ m | Ce sont des côtés homologues de triangles isométriques. |
| $m\overline{CD} \approx 316{,}39$ m | On recourt au théorème de Pythagore.<br>$a^2 + b^2 = c^2$<br>$680^2 + b^2 = 750^2$<br>$462\,400 + b^2 = 562\,500$<br>$b^2 = 100\,100$<br>$b \approx 316{,}39$ m |
| Longueur de la clôture = 1746,39 m | Le périmètre d'une figure correspond à la somme de la mesure de ses côtés, et 750 + 680 + 316,39 = 1746,39 m. |

# 5.4 LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LES TRIANGLES RECTANGLES

## Interpréter les triangles rectangles pour trouver les relations métriques

Il existe différentes relations entre les côtés d'un triangle rectangle dans lequel on a tracé la hauteur issue du sommet de l'angle droit.




La majorité des relations sont obtenues grâce aux triangles semblables. En effet, dans cette figure, les trois triangles (ABC, ACD et BCD) sont tous semblables selon AA (puisqu'ils ont tous un angle droit et qu'ils ont des angles communs). Voici donc les cinq relations métriques.

<table>
<tr>
<td>1. La hauteur issue de l'angle droit est la moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle crée sur l'hypoténuse.<br>$h^2 = c_1 \cdot c_2$</td>
<td colspan="2">Les triangles ACD et BCD sont semblables selon AA. Ainsi, il est possible d'établir une proportion entre les côtés homologues.<br>$\frac{h}{c_2} = \frac{c_2}{h}$<br>Selon le produit des moyens qui est égal au produit des extrêmes, $h \cdot h = c_1 \cdot c_2$.<br>On obtient ainsi $h^2 = c_1 \cdot c_2$.</td>
</tr>
<tr>
<td>2 et 3.<br>Les cathètes sont la moyenne proportionnelle entre leur projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse.<br>$a^2 = c_2 \cdot c$<br>et<br>$b^2 = c_1 \cdot c$</td>
<td>Les triangles ABC et BCD sont semblables selon AA. Ainsi, il est possible de faire une proportion entre les côtés homologues.<br>$\frac{a}{c} = \frac{c_2}{a}$<br>Selon le produit des moyens qui est égal au produit des extrêmes, $a \cdot a = c_2 \cdot c$.<br>On obtient ainsi $a^2 = c_2 \cdot c$.</td>
<td>Les triangles ABC et ACD sont semblables par AA. Ainsi, il est possible de faire une proportion entre les côtés homologues.<br>$\frac{b}{c} = \frac{c_1}{b}$<br>Selon le produit des moyens qui est égal au produit des extrêmes, $b \cdot b = c_1 \cdot c$.<br>On obtient ainsi $b^2 = c_1 \cdot c$.</td>
</tr>
</table>

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

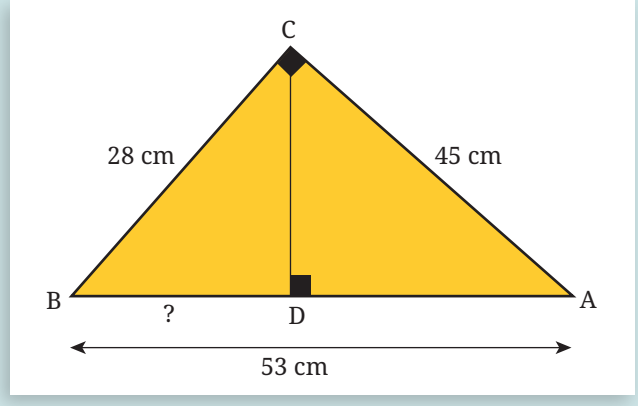
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

| | |
|---|---|
| **4.** Le produit de la hauteur issue de l'angle droit et de l'hypoténuse est égal au produit des cathètes. $a \cdot b = c \cdot h$ | Afin de calculer l'aire du triangle ABC, il est possible d'utiliser $\overline{AB}$ comme base et $\overline{CD}$ comme hauteur, mais il est aussi possible d'utiliser $\overline{BC}$ comme base et $\overline{AC}$ comme hauteur. On peut donc créer l'égalité ci-dessous. $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ En multipliant par deux les termes de chaque côté de l'égalité, on obtient $a \cdot b = c \cdot h$. |
| **5.** La dernière relation métrique est le théorème de Pythagore. $a^2 + b^2 = c^2$ | |

Afin de savoir quelle relation métrique utiliser selon le contexte, il est important de bien établir les mesures connues et les mesures recherchées et de choisir la relation métrique comportant les côtés en question.

**EXEMPLE**

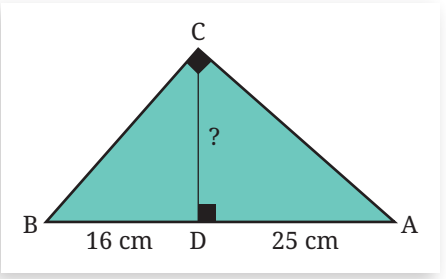



| | |
|---|---|
| **1.** Identifier les côtés connus et les côtés recherchés. | $a = 28$ cm<br>$b = 45$ cm<br>$c = 53$ cm<br>$c_2 = ?$ |
| **2.** Choisir la relation métrique appropriée. | Puisqu'on connaît $a$ et $c$ et qu'on cherche $c_2$, on utilise la formule $a^2 = c_2 \cdot c$. |
| **3.** Remplacer les données connues dans la relation métrique par leur valeur respective et isoler la mesure manquante. | $a^2 = c_2 \cdot c$<br>$28^2 = c_2 \cdot 53$<br>$784 = c_2 \cdot 53$<br>$14{,}79 \text{ cm} \approx c_2$ |

# EXERCICES

**1.** Calculez les mesures manquantes dans chacun des triangles suivants.

**a**



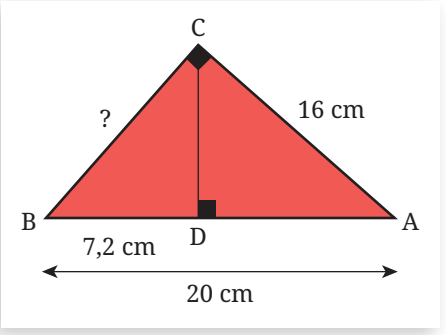

**1** $c_1 = 25$
$c_2 = 16$
$h = ?$

**2** $h^2 = c_1 \cdot c_2$

**3** $h^2 = 16 \cdot 25$
$h^2 = 400$
$h = 20$

**RÉPONSE** $h = 20$ cm

**b**



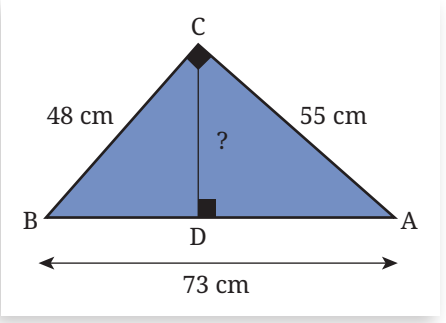

**1** $b = 16$
$c_2 = 7{,}2$
$c = 20$
$a = ?$

**2** $a^2 = c_2 \cdot c$ (ou $a^2 + b^2 = c^2$)

**3** $a^2 = 7{,}2 \cdot 20$
$a^2 = 144$
$a = 12$

**RÉPONSE** $a = 12$ cm

**c**




**1** $a = 48$
$b = 55$
$c = 73$
$h = ?$

**2** $a \cdot b = c \cdot h$

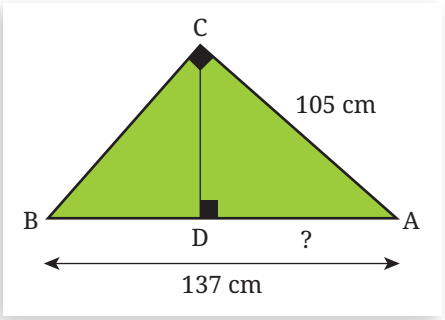
**3** $48 \cdot 55 = 73 \cdot h$
$2640 = 73 \cdot h$
$36{,}16 \approx h$

**RÉPONSE** $h \approx 36{,}16$ cm

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**d**



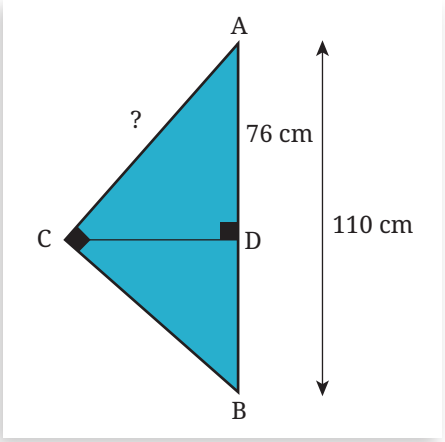

1 $b = 105$
$c = 20$
$c_1 = ?$

2 $b^2 = c_1 \cdot c$

3 $105^2 = c_1 \cdot 137$
$11\,025 = c_1 \cdot 137$
$80{,}47 \approx c_1$

**RÉPONSE** $c_1 \approx 80{,}47$ cm

**e**



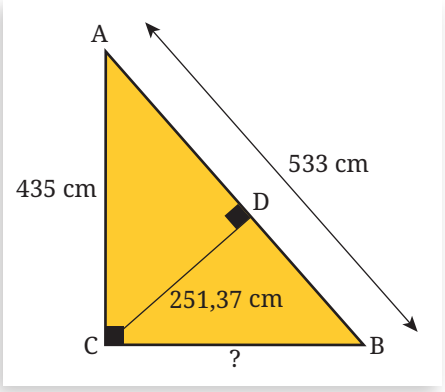

1 $c_1 = 76$
$c = 110$
$b = ?$

2 $b^2 = c_1 \cdot c$

3 $b^2 = 76 \cdot 110$
$b^2 = 8360$
$b \approx 91{,}43$

**RÉPONSE** $b \approx 91{,}43$ cm

**f**



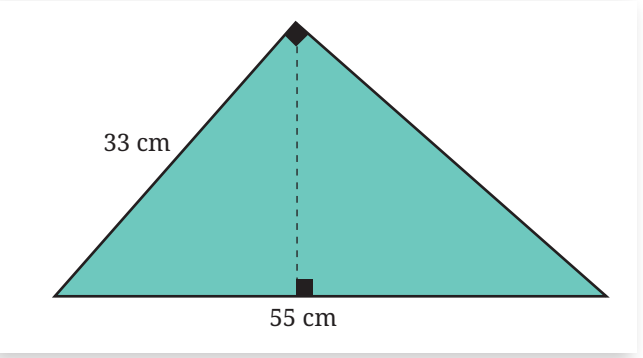

1 $b = 435$
$c = 1533$
$h = 251{,}37$
$a = ?$

2 $a \cdot b = c \cdot h$

3 $a \cdot 435 = 533 \cdot 251{,}37$
$a \cdot 435 = 133\,980{,}21$
$a \approx 308{,}00$

**RÉPONSE** $a \approx 308{,}00$ cm

★★**2.** Quelle est l'aire du triangle suivant ?




**1** Mesure de $b$

$a = 33$ cm

$c = 55$ cm

$b = ?$

$a^2 + b^2 = c^2$

$33^2 + b^2 = 55^2$

$1089 + b^2 = 3025$

$b^2 = 1936$

$b = 44$ cm

**2** Aire du triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{33 \cdot 44}{2}$$

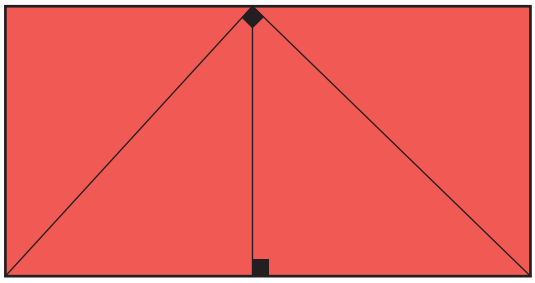
$A = 726$ cm$^2$

**RÉPONSE** L'aire du triangle est de 726 cm$^2$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Quelle est l'aire du rectangle ci-dessous ?




**1** Hauteur du rectangle

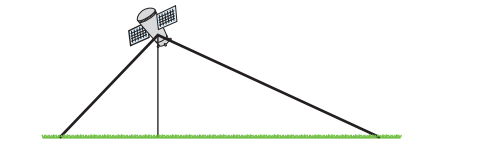
$c_2 = 25$ cm
$c_1 = 28$ cm
$h = ?$
$h^2 = c_1 \bullet c_2$
$h^2 = 28 \bullet 25$
$h^2 = 700$
$h \approx 26{,}46$ cm

**2** Aire du rectangle

$A = b \bullet h$
$A = (28 + 25) \bullet 26{,}46$
$A = 1402{,}38$ cm$^2$

**RÉPONSE** L'aire du rectangle est de 1402,38 cm$^2$.

★★**4.** Un satellite effectue des observations à Montréal et à Rouyn-Noranda. La distance entre les deux villes est de 512 km. De plus, la distance au sol entre le satellite et Montréal est de 128 km. À quelle altitude se trouve le satellite ?




**1** Mesure de $c_1$

$c_1 = c - c_2$

$c_1 = 512 - 128$

$c_1 = 384$

**2** Altitude du satellite

$c = 512$

$c_2 = 128$

$c_1 = 384$

$h = ?$

$h^2 = c_1 \bullet c_2$

$h^2 = 384 \bullet 128$

$h^2 = 49\ 152$

$h \approx 221{,}70$

**RÉPONSE** Le satellite se trouve à une altitude de 221,70 km.

★★**5.** Lors de la dernière tempête, un arbre a partiellement été déterré par le vent. Afin de l'aider à renforcer ses racines, les autorités le replacent perpendiculairement au sol et attachent à son sommet un long fil de fer mesurant 9,2 m, qu'elles plantent plus loin dans le sol. De plus, elles attachent un autre fil de fer de la base de l'arbre jusqu'au premier fil de sorte que les deux fils forment un angle droit et que la distance entre leur jonction et l'endroit où le long fil est planté soit de 2,7 m. À quelle distance de l'arbre est planté le long fil de fer ?

$c = 9{,}2$

$c_2 = 2{,}7$

$a = ?$

$a^2 = c_2 \bullet c$

$a^2 = 2{,}7 \bullet 9{,}2$

$a^2 = 24{,}84$

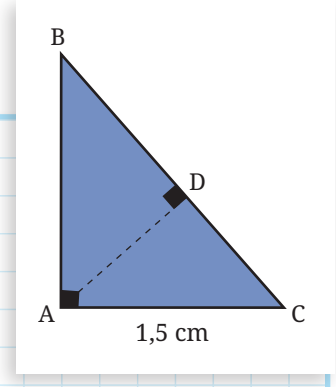
$a \approx 4{,}98$

**RÉPONSE** Le long fil de fer est planté à 4,98 m de l'arbre.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **6.** Si l'aire du triangle ABC est de 1,5 cm², combien mesure $\overline{AD}$ ?




**1** Mesure de $\overline{AB}$

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$
$$1{,}5 = \frac{1{,}5 \cdot \overline{AB}}{2}$$
$$3 = 1{,}5 \cdot \overline{AB}$$
$$2 = \overline{AB}$$

**2** Mesure de $\overline{BC}$

$a = 1{,}5$
$b = 2$
$c = ?$
$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$1{,}5^2 + 2^2 = c^2$$
$$6{,}25 = c^2$$
$$2{,}5 = c$$

**3** Mesure de $\overline{AD}$

$a = 1{,}5$
$b = 2$
$c = 2{,}5$
$h = ?$
$$a \cdot b = c \cdot h$$
$$1{,}5 \cdot 2 = 2{,}5 \cdot h$$
$$3 = 2{,}5 \cdot h$$
$$1{,}2 \approx h$$

**RÉPONSE** $\overline{AD}$ mesure 1,2 cm.

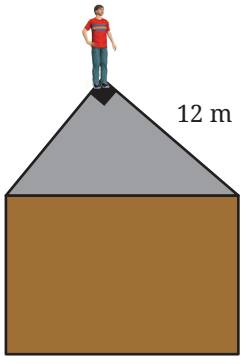
★★ **7.** Miguel doit effectuer des réparations sur le toit de sa maison. Ayant peur d'être pris de vertige, il essaie de calculer quelle sera la hauteur maximale qu'il atteindra sur son toit. Miguel se fie donc aux mesures ci-dessous, contenues dans l'acte de vente de la maison.

**La largeur de la maison est de 16,5 m.**

**La longueur du côté du toit faisant face à la rue mesure 12 m.**

**L'aire de la façade de la maison (sans le toit) est de 185,63 m².**

Quelle sera la hauteur maximale que Miguel atteindra sur son toit ?




**1** Hauteur du rectangle

$A = b \cdot h$

$185{,}63 = 16{,}5 \cdot h$

$11{,}25 \approx h$

**2** Mesure du troisième côté du triangle

$b = 12$

$c = 16{,}5$

$a = ?$

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + 12^2 = 16{,}5^2$

$a^2 + 144 = 272{,}25$

$a^2 = 128{,}25$

$a \approx 11{,}32$

**3** Hauteur du triangle

$b = 12$

$c = 16{,}5$

$a = 11{,}32$

$h = ?$

$a \cdot b = c \cdot h$

$11{,}32 \cdot 12 = 16{,}5 \cdot h$

$135{,}84 = 16{,}5 \cdot h$

$8{,}23 \approx h$

**4** Hauteur maximale de Miguel

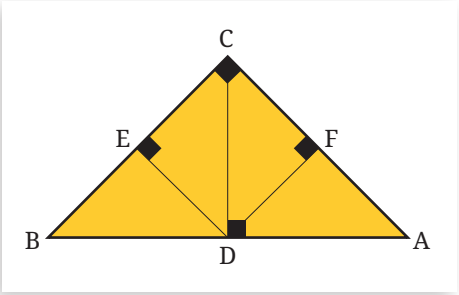
$11{,}25 + 8{,}23 = 19{,}48$

**RÉPONSE** Miguel atteindra une hauteur maximale de 19,48 m.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **8.** Malak vient d'ouvrir un commerce où elle peut exercer sa passion : le tatouage. Afin que sa clientèle sache si son commerce est ouvert, elle veut installer dans sa vitrine des fils de lumière dans un motif composé de triangles rectangles isocèles. Si $\overline{AB}$ mesure 42 cm, quelle sera la longueur du fil de lumière que Malak utilisera pour créer son motif ?




**1** Mesure de $\overline{AC}$ et de $\overline{BC}$

$a^2 + b^2 = c^2$
$x^2 + x^2 = 42^2$
$2x^2 = 42^2$
$2x^2 = 1764$
$x^2 = 882$
$x \approx 29{,}70$

**2** Mesure de $\overline{CD}$

$a = 29{,}70$
$b = 29{,}70$
$c = 42$
$h = ?$
$a \cdot b = c \cdot h$
$29{,}70 \cdot 29{,}70 = 42 \cdot h$
$882{,}09 = 42 \cdot h$
$21{,}00 \approx h$

**3** Mesure de $\overline{AD}$ et de $\overline{BD}$

Dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi une médiane, si bien que D est le point milieu de $\overline{AB}$.

$\frac{42}{2} = 21$

**4** Mesure de $\overline{ED}$

$a = 21$
$b = 21$
$c = 29{,}70$
$h = ?$
$a \cdot b = c \cdot h$
$21 \cdot 21 = 29{,}70 \cdot h$
$441 = 29{,}70 \cdot h$
$14{,}\overline{84} \approx h$

**5** Mesure de $\overline{DF}$

$a = 21$
$b = 21$
$c = 29{,}70$
$h = ?$
$a \cdot b = c \cdot h$
$21 \cdot 21 = 29{,}70 \cdot h$
$441 = 29{,}70 \cdot h$
$14{,}\overline{84} \approx h$

**6** Longueur du fil

$L_{\text{fil}} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{DF}$
$L_{\text{fil}} = 42 + 29{,}70 + 29{,}70 + 21 + 14{,}85 + 14{,}85$
$L_{\text{fil}} \approx 152{,}10$

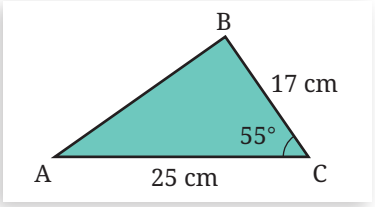
**RÉPONSE** La longueur du fil de lumière de Malak sera de 152,10 cm.

# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 5

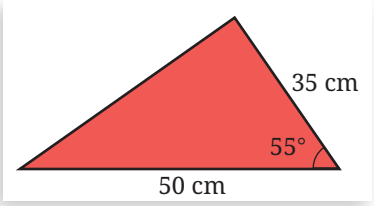
## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

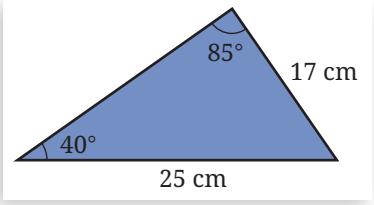
**1.** Parmi les triangles suivants, lequel est nécessairement semblable au triangle ABC ci-contre ?



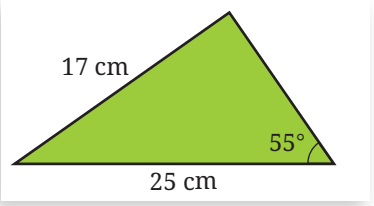

**a**



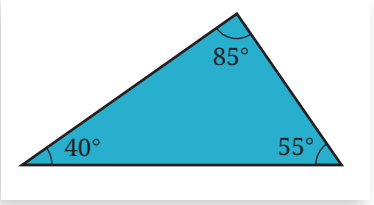

**b**




**c**




**d**



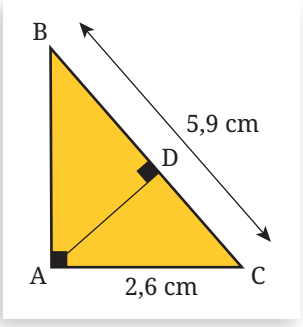

**2.** Quelle est la mesure de $\overline{CD}$ dans le triangle ci-contre ?

**a** 13,38 cm

**b** 3,3 cm

**c** 1,15 cm

**d** 5,29 cm



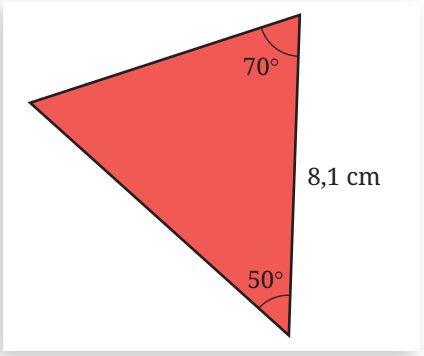

## CALCULS

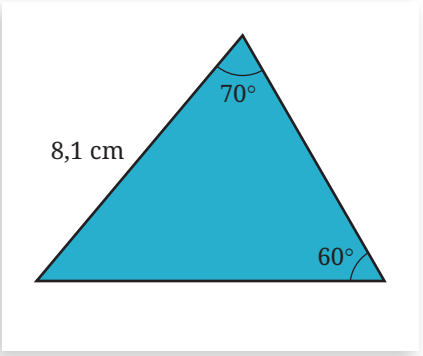
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★3. Selon quelle condition minimale les deux triangles ci-dessous sont-ils isométriques ?




**a** CAC **b** CCC **c** ACA **d** Aucune (pas d'isométrie)

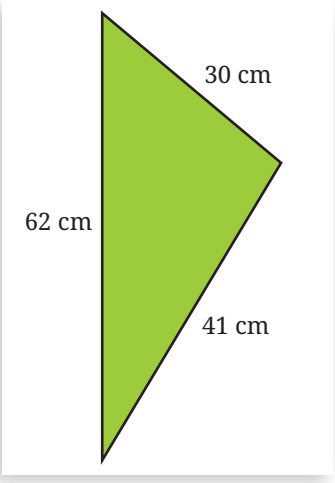
★4. Si les deux triangles ci-contre sont semblables, quelle est la mesure manquante ?

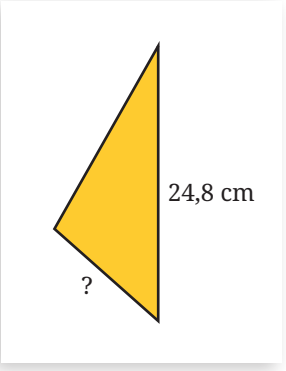
**a** 75 cm

**b** 12 cm

**c** 16,4 cm

**d** 18,18 cm

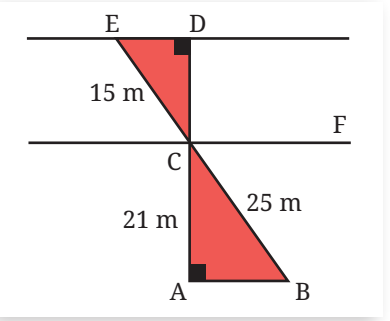



## CALCULS

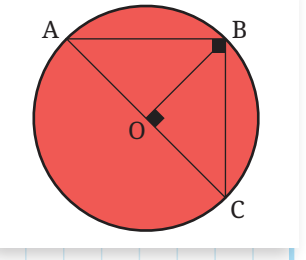
# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**5.** Dans la figure ci-dessous, quelle est la mesure de $\overline{CD}$ si $\overline{DE}$ et $\overline{CF}$ sont parallèles ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle CAB = m\angle CDE$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ACB = m\angle DCE$ | Ce sont des angles opposés par le sommet. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{BC}}{m\overline{CE}} = \frac{m\overline{AC}}{m\overline{CD}}$<br>$\frac{25}{15} = \frac{21}{m\overline{CD}}$<br>$m\overline{CD} = \frac{15 \cdot 21}{25}$<br>$m\overline{CD} = 12{,}6$ m | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

★★**6.** Si le rayon du cercle de centre O ci-contre mesure 16 cm, combien mesure $\overline{BC}$ ?



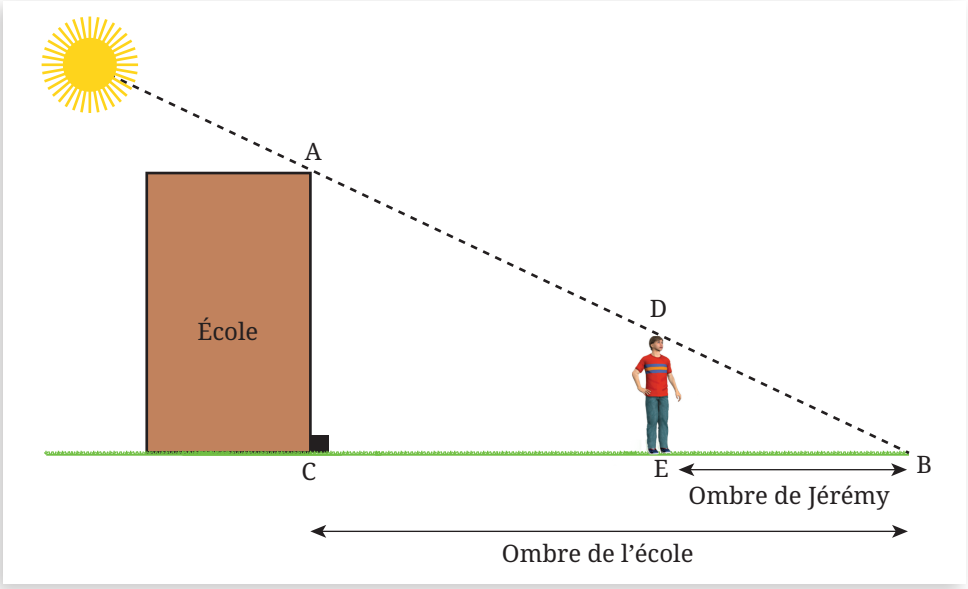

$c_2 = 16$
$c_1 = 16$
$h = 16$
$c = 32$
$a = ?$
$a^2 = c_2 \cdot c$
$a^2 = 16 \cdot 32$
$a^2 = 512$
$a \approx 22{,}63$

**RÉPONSE** $\overline{BC}$ mesure 22,63 cm.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**7.** Jérémy essaie de calculer la hauteur de son école. Puisqu'il est impossible de prendre une mesure à l'aide d'un instrument, il se sert des triangles pour parvenir à ses fins. Jérémy se place donc au sol de sorte que son ombre et l'ombre de l'école se terminent au même endroit (B). Si Jérémy mesure 1,7 m et qu'il se trouve à 25 m de l'école et à 2,5 m de la fin de l'ombre, quelle est la hauteur de l'école ?




| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle ACB = m\angle DEB$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $m\angle ABC = m\angle DBE$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $\Delta ABC \sim \Delta DEB$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{BE}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{DE}}{m\overline{AC}}$<br>$\frac{2,5}{27,5} = \frac{1,7}{m\overline{AC}}$<br>$m\overline{AC} = \frac{27,5 \cdot 1,7}{2,5}$<br>$m\overline{AC} = 18,7$ m | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |

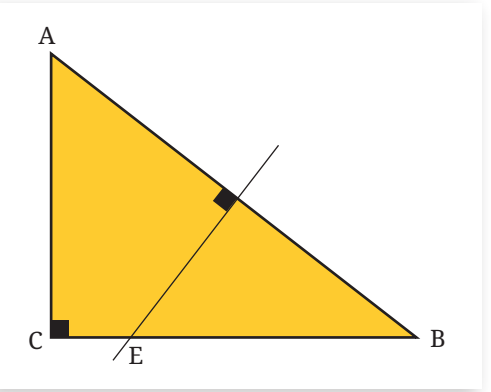
★★**8.** Dans la figure ci-dessous :

**$\overline{AB}$ mesure 22,5 cm.**

**$\overline{BC}$ mesure 19 cm.**

**$\overline{AC}$ mesure 13,5 cm.**

**$\overline{DE}$ est la médiatrice de $\overline{AB}$.**



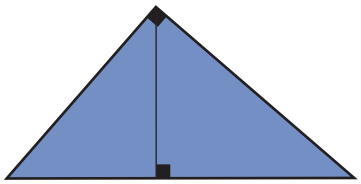

Quelle est l'aire du triangle BDE ?

| AFFIRMATION | JUSTIFICATION |
|---|---|
| $m\angle BDE = 90°$ | Une médiatrice coupe un segment à angle droit. |
| $m\angle ACB = m\angle BDE$ | On se base sur une donnée du problème et sur l'étape 1. |
| $m\angle ABC = m\angle DBE$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $\Delta ABC \sim \Delta DEB$ | Ils respectent la condition AA. |
| $m\overline{BD} = 11{,}25$ cm | Une médiatrice coupe un segment en son milieu. |
| $\frac{m\overline{BD}}{m\overline{BC}} = \frac{m\overline{DE}}{m\overline{AC}}$<br>$\frac{11{,}25}{19} = \frac{m\overline{DE}}{13{,}5}$<br>$m\overline{DE} = \frac{11{,}25 \cdot 13{,}5}{19}$<br>$m\overline{DE} \approx 7{,}99$ cm | Ce sont des côtés homologues proportionnels de triangles semblables. |
| Aire du $\Delta BDE \approx$<br>44,94 cm$^2$ | On emploie la formule pour calculer l'aire d'un triangle.<br>$A = \frac{b \cdot h}{2}$<br>$A = \frac{7{,}99 \cdot 11{,}25}{2}$<br>$A \approx 44{,}94$ cm$^2$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★ **9.** Le triangle ci-contre a la même aire que celle d'un carré. Quelle est la mesure de chaque côté du carré ?




**1** Mesure de la hauteur du triangle

$c_2 = 14$ cm
$c_1 = 21$ cm
$h = ?$
$h^2 = c_1 \bullet c_2$
$h^2 = 14 \bullet 21$
$h^2 = 294$
$h \approx 17{,}15$ cm

**2** Aire du triangle

$$A = \frac{b \bullet h}{2}$$
$$A = \frac{(21 + 14) \bullet 17{,}15}{2}$$
$A \approx 300{,}13$ cm$^2$

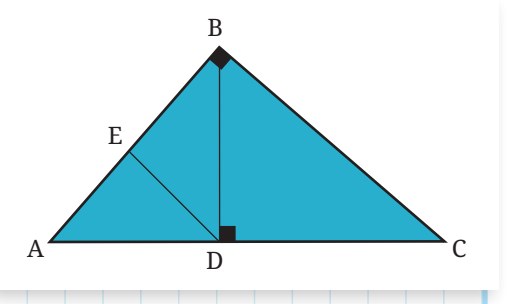
**3** Côté du carré

$A = c^2$
$300{,}13 = c^2$
$17{,}32 \text{ cm} \approx c$

**RÉPONSE** Chaque côté du carré mesure 17,32 cm.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **10.** Dans la représentation ci-contre, $\overline{DE}$ et $\overline{BC}$ sont parallèles. De plus, $\overline{AC}$ et $\overline{CD}$ mesurent respectivement 62 cm et 39,68 cm. Combien mesure $\overline{DE}$ ?




**1** Mesure de $\overline{BC}$

$c = 62$

$c_1 = 39{,}68$

$b = ?$

$b^2 = c_1 \bullet c$

$b^2 = 39{,}68 \bullet 62$

$b^2 = 2460{,}16$

$b = 49{,}60$

**2** Mesure de $\overline{AD}$

$\overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD}$

$\overline{AD} = 62 - 39{,}68$

$\overline{AD} = 22{,}32$

**3** Mesure de $\overline{DE}$

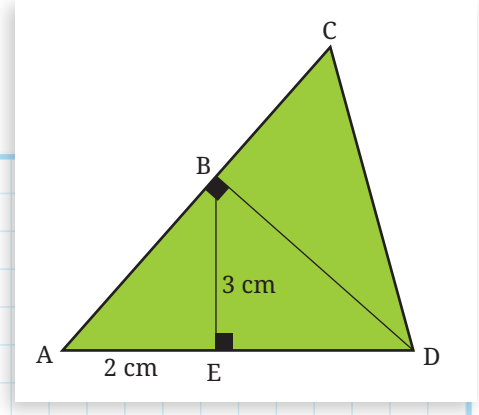
| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle EAD = m\angle BAC$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $m\angle AED = m\angle ABC$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta AED \cong \Delta ABC$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{AD}}{m\overline{AC}} = \frac{m\overline{ED}}{m\overline{BC}}$<br>$\frac{22{,}32}{62} = \frac{m\overline{ED}}{49{,}60}$<br>$m\overline{ED} = \frac{49{,}60 \bullet 22{,}32}{62}$<br>$m\overline{ED} \approx 17{,}86$ | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

**RÉPONSE** $\overline{ED}$ mesure 17,86 cm.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **11.** Dans la représentation ci-contre, quelle est la mesure de $\overline{BC}$ si $\overline{BD}$ est la bissectrice de $\angle CDE$ ?




**1** Mesure de $\overline{DE}$

$h = 3$
$c_2 = 2$
$c_1 = ?$
$h^2 = c_1 \cdot c_2$
$3^2 = c_1 \cdot 2$
$9 = c_1 \cdot 2$
$4{,}5 = c_1$

**2** Mesure de $\overline{BD}$

$a = 3$
$b = 4{,}5$
$c = ?$
$a^2 + b^2 = c^2$
$3^2 + 4{,}5^2 = c^2$
$9 + 20{,}25 = c^2$
$29{,}25 = c^2$
$5{,}41 \approx c$

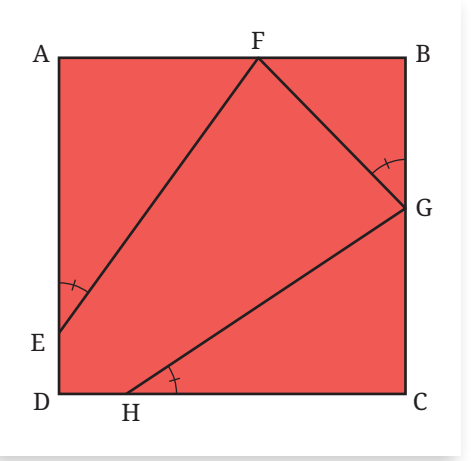
**3** Mesure de $\overline{BC}$

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle CDB = m\angle BDE$ | Une bissectrice sépare un angle en deux angles isométriques. |
| $m\angle CBD = 90°$ | Il est supplémentaire avec $\angle ABD$, et $180 - 90 = 90°$. |
| $m\angle CBD = m\angle BED$ | On se base sur une donnée du problème et sur l'étape 2. |
| $\Delta BCD \cong \Delta BDE$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{BD}}{m\overline{DE}} = \frac{m\overline{BC}}{m\overline{BE}}$<br>$\frac{5{,}41}{4{,}5} = \frac{m\overline{BC}}{3}$<br>$m\overline{BC} = \frac{3 \cdot 5{,}41}{4{,}5}$<br>$m\overline{BC} \approx 3{,}61$ | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

**RÉPONSE** $\overline{BC}$ mesure 3,61 cm.

**12.** Jacob a reçu en héritage un terrain de forme carrée dont les côtés mesurent 1,5 km. Afin de perpétuer la tradition familiale, il décide d'utiliser le terrain pour faire de l'agriculture. Il y fera donc pousser différents végétaux, mais il gardera la zone pentagonale DEFGH pour cultiver du soja afin de fournir des compagnies productrices de tofu.

De plus, Jacob utilisera la zone triangulaire FBG pour construire sa maison et aménager un petit terrain pour sa famille. Il sait que $\overline{BF}$ mesure 600 m et que $\overline{BG}$ mesure 700 m.




Quelle sera l'aire de la région où Jacob cultivera du soja ?

**1** Mesure de $\overline{AF}$

$\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{FB}$

$\overline{AF} = 1500 - 600$

$\overline{AF} = 900$ m

**2** Mesure de $\overline{CG}$

$\overline{CG} = \overline{BC} - \overline{BG}$

$\overline{CG} = 1500 - 700$

$\overline{CG} = 800$ m

**3** Mesure de $\overline{AE}$

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle FAE = m\angle FBG$ | Chaque angle d'un carré mesure 90°. |
| $m\angle AEF = m\angle BGF$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta AEF \cong \Delta BGF$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{AF}}{m\overline{BF}} = \frac{m\overline{AE}}{m\overline{BG}}$<br>$\frac{900}{600} = \frac{m\overline{AE}}{700}$<br>$m\overline{AE} = \frac{700 \cdot 900}{600}$<br>$m\overline{AE} = 1050$ m | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**4** Mesure de $\overline{CH}$

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle GCH = m\angle FBG$ | Chaque angle d'un carré mesure 90°. |
| $m\angle GHC = m\angle BGF$ | On se base sur une donnée du problème. |
| $\Delta CGH \cong \Delta BGF$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{CG}}{m\overline{BF}} = \frac{m\overline{CH}}{m\overline{BG}}$<br>$\frac{800}{600} = \frac{m\overline{CH}}{700}$<br>$m\overline{CH} = \frac{700 \bullet 800}{600}$<br>$m\overline{CH} = 933,\overline{3}$ m | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

**5** Aire du terrain ABCD

$A = c^2$

$A = 1500^2$

$A = 2\ 250\ 000\ m^2$

**6** Aire du $\Delta BGF$

$A = \frac{b \bullet h}{2}$

$A = \frac{600 \bullet 700}{2}$

$A = 210\ 000\ m^2$

**7** Aire du $\Delta AEF$

$A = \frac{b \bullet h}{2}$

$A = \frac{900 \bullet 1050}{2}$

$A = 472\ 500\ m^2$

**8** Aire du $\Delta CGH$

$A = \frac{b \bullet h}{2}$

$A = \frac{800 \bullet 933,33}{2}$

$A = 373\ 332\ m^2$

**9** Aire de la zone DEFGH

$A_{DEFGH} = A_{ABCD} - A_{BGF} - A_{AEF} - A_{CGH}$

$A_{DEFGH} = 2\ 250\ 000 - 210\ 000 - 472\ 500 - 373\ 332$

$A_{DEFGH} = 1\ 194\ 168\ m^2$

**RÉPONSE** L'aire de la section où Jacob cultivera du soja est de 1 194 168 m².

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## Mandy l'architecte

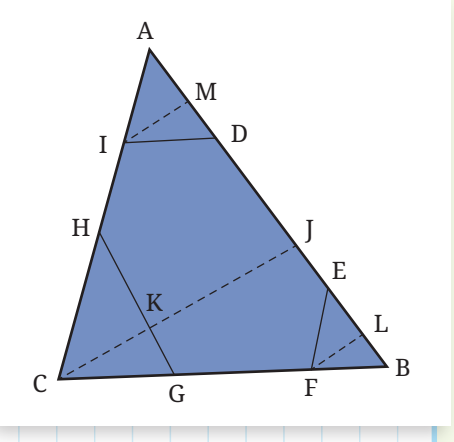
Mandy est architecte et elle doit couper un morceau de bois triangulaire (ABC) afin de le faire correspondre à l'hexagone DEFGHI. L'hexagone devra ainsi avoir une aire d'au moins 210 m$^2$ et les pointillés représentent les hauteurs. Mandy détient les informations suivantes.

$\overline{AB} \parallel \overline{GH}$, $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ et $\overline{BC} \parallel \overline{DI}$

$m\overline{CK} = 7$ m et $m\overline{CJ} = 21$ m

$m\overline{FL} = 3$ m et $m\overline{MI} = 5$ m

$m\overline{AB} = 25$ m et $m\overline{EF} = 4{,}5$ m




La pièce de bois de Mandy aura-t-elle une superficie assez grande pour correspondre au plan ?

**1** Calcul des mesures manquantes à l'aide des triangles semblables

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle HCG = m\angle ACB$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $m\angle CHG = m\angle CAB$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta CGH \approx \Delta ABC$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{CK}}{m\overline{CJ}} = \frac{m\overline{HG}}{m\overline{AB}}$<br>$\frac{7}{21} = \frac{m\overline{HG}}{25}$<br>$m\overline{HG} = \frac{25 \cdot 7}{21}$<br>$m\overline{HG} = 8{,}\overline{3}$ m | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |
| $m\angle IAD = m\angle CAB$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $m\angle ADI = m\angle ABC$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta ADI \approx \Delta ABC$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{IM}}{m\overline{CJ}} = \frac{m\overline{AD}}{m\overline{AB}}$<br>$\frac{5}{21} = \frac{m\overline{AD}}{25}$<br>$m\overline{AD} = \frac{25 \cdot 5}{21}$<br>$m\overline{AD} \approx 5{,}95$ m | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle EBF = m\angle ABC$ | C'est un angle commun aux deux triangles. |
| $m\angle BFE = m\angle BCA$ | Ce sont des angles correspondants formés par des parallèles et une sécante. |
| $\Delta BEF \approx \Delta ABC$ | Ils respectent la condition AA. |
| $\frac{m\overline{FL}}{m\overline{CJ}} = \frac{m\overline{EB}}{m\overline{AB}}$<br>$\frac{3}{21} = \frac{m\overline{EB}}{25}$<br>$m\overline{EB} = \frac{25 \cdot 3}{21}$<br>$m\overline{EB} \approx 3{,}57$ m | Ce sont des paires de mesures homologues proportionnelles de triangles semblables. |

**2** Aire du $\Delta ABC$

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{25 \cdot 21}{2}$

$A = 262{,}5$ m$^2$

**3** Aire du $\Delta CGH$

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{8{,}33 \cdot 7}{2}$

$A \approx 29{,}16$ m$^2$

**4** Aire du $\Delta ADI$

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{5{,}95 \cdot 5}{2}$

$A \approx 14{,}88$ m$^2$

**5** Aire du $\Delta BEF$

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{3{,}57 \cdot 3}{2}$

$A \approx 5{,}36$ m$^2$

**6** Aire de DJKI

$A = \Delta ABC - \Delta CGH - \Delta ADI - \Delta BEF$

$A = 262{,}5 - 29{,}16 - 14{,}88 - 5{,}36$

$A = 213{,}10$ m$^2$

**RÉPONSE** La superficie de la pièce de bois de Mandy sera assez grande pour correspondre au plan.

# SITUATION-PROBLÈME

CD1

## La scène de spectacle

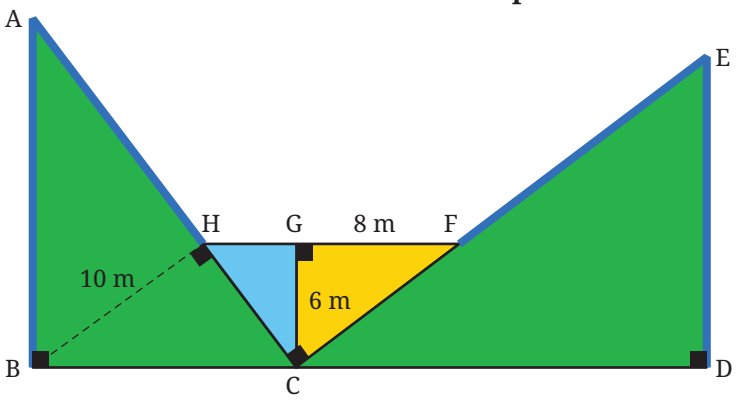
Il y a cinq ans, un groupe de musique rock organisait sa première grande tournée. Le plancher de la scène de spectacle avait alors la forme d'un triangle rectangle, représenté par la zone jaune dans le schéma ci-dessous.

Deux ans plus tard, avant d'entreprendre une autre grande tournée, ce même groupe a fait ajouter au plancher de la scène une annexe qui correspond au triangle rectangle bleu dans le schéma.

Cette année, après avoir lancé un nouvel album qui a atteint le sommet des palmarès, les membres du groupe préparent une tournée mondiale et souhaitent apporter d'autres modifications à la scène. Ils veulent y attacher deux immenses pièces, représentées par les triangles rectangles verts dans le schéma. Pour des raisons de sécurité, leur agent leur a suggéré d'installer une clôture le long de certains côtés de la scène. L'aire de la partie ABC correspond au $\frac{16}{25}$ de l'aire de la partie CDE.

Calculez la longueur de clôture que les membres du groupe doivent prévoir.

**Vue de dessus de la scène de spectacle**




Plusieurs démarches possibles.

**1** Mesure du segment GH

$h^2 = c_1 \cdot c_2$

$6^2 = c_1 \cdot 8$

$36 = c_1 \cdot 8$

$4{,}5 = c_1$

**2** Mesure du segment FH

$4{,}5 + 8 = 12{,}5$

**3** Mesure du segment CH

$a^2 = c_2 \cdot c$

$a^2 = 4{,}5 \cdot 12{,}5$

$a^2 = 56{,}25$

$a = 4{,}5$

**4** Mesure du segment CF

$b^2 = c_1 \cdot c$

$b^2 = 8 \cdot 12{,}5$

$b^2 = 100$

$b = 10$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**5** Mesure du segment AH

$h^2 = c_1 \bullet c_2$

$10^2 = c_1 \bullet 7{,}5$

$100 = c_1 \bullet 7{,}5$

$13{,}33 \approx c_1$

**6** Mesure du segment AB

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 10^2 + 13{,}33^2$

$c^2 \approx 277{,}689\,9$

$c \approx 16{,}66$

**7** Mesure du segment AC

$13{,}33 + 7{,}5 \approx 20{,}83$

**8** Mesure du segment BC

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = 20{,}83^2 - 16{,}66^2$

$a^2 \approx 156{,}33$

$a \approx 12{,}5$

**9** Analyse des triangles ABC et CDE

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| $m\angle FHC = m\angle ACB$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des droites parallèles et une sécante. |
| $m\angle HFC = m\angle ECD$ | Ce sont des angles alternes-internes formés par des droites parallèles et une sécante. |
| $\angle BAC$ est complémentaire à $\angle ACB$. | L'angle ABC mesure 90° et la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°. |
| $\angle HFC$ est complémentaire à $\angle FHC$. | L'angle ABC mesure 90° et la somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°. |
| $m\angle BAC = m\angle HFC$ | Ils sont formés d'angles isométriques. |
| $m\angle CAB = m\angle ECD$ | Ils sont formés d'angles isométriques. |
| $m\angle ABC = m\angle EDC$ | On se base sur les données du problème. |
| $\Delta ABC \sim \Delta CDE$ | Ils respectent la condition AA. |

**10** Rapport de similitude entre les triangles ABC et CDE

$k^2 = \frac{16}{25}$

$k = \frac{4}{5}$

**11** Mesure du segment ED

$k = \frac{4}{5} = \frac{12{,}5}{m\overline{ED}}$

$m\overline{ED} \approx 12{,}5$

**12** Mesure du segment EC

$k = \frac{4}{5} = \frac{20{,}83}{m\overline{EC}}$

$m\overline{EC} \approx 26{,}04$

**13** Mesure du segment EF

$26{,}04 - 10 \approx 16{,}04$

**14** Longueur de clôture nécessaire

$13{,}33 + 16{,}66 + 15{,}63 + 16{,}04 \approx 61{,}66$

**RÉPONSE** Les membres du groupe doivent prévoir 61,66 m de clôture.

# FEUILLE DE NOTES

## Triangles semblables (~)

Des triangles semblables ont des angles homologues isométriques et leurs côtés homologues sont proportionnels.

Le rapport de similitude est représenté par la lettre $k$.

**Trois cas de similitude des triangles**

**1.** CCC
**2.** CAC
**3.** AA

**Le calcul de mesures manquantes**

Il faut d'abord démontrer que les triangles sont semblables avant d'utiliser les propriétés des triangles semblables pour trouver une mesure manquante.

## Triangles isométriques (≅)

Des triangles isométriques ont des angles homologues et leurs côtés homologues sont isométriques.

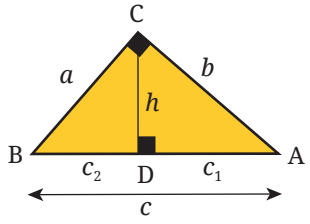
**Trois cas d'isométrie des triangles**

**1.** CCC
**2.** CAC
**3.** ACA

**Le calcul de mesures manquantes**

Il faut d'abord démontrer que les triangles sont isométriques avant d'utiliser les propriétés des triangles isométriques pour trouver une mesure manquante.

## Relations métriques




**1.** $h^2 = c_1 \cdot c_2$
**2.** $a^2 = c_2 \cdot c$
**3.** $b^2 = c_1 \cdot c$
**4.** $a \cdot b = c \cdot h$
**5.** $a^2 + b^2 = c^2$

## Propriétés

Il est utile d'inscrire des propriétés sur votre feuille de notes. Vous pouvez vous référer à l'annexe à la fin de ce cahier pour en consulter la liste complète. En voici quelques exemples.

- La somme des angles intérieurs d'un triangle est 180°.
- Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30° mesure la moitié de l'hypoténuse.
- Des angles alternes-internes formés par des parallèles et une sécante sont isométriques.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

6

# LA TRIGONOMÉTRIE


| | | |
|---|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | | 284 |
| **6.1** | Les rapports trigonométriques dans les triangles rectangles | 286 |
| **6.2** | La loi des sinus | 298 |
| **6.3** | L'aire des triangles | 306 |
| **Consolidation du chapitre 6** | | 315 |
| **Situation d'application – Le toit de la maisonnette** | | 323 |
| **Situation-problème – Une terre en héritage** | | 324 |
| **Feuille de notes** | | 326 |


© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

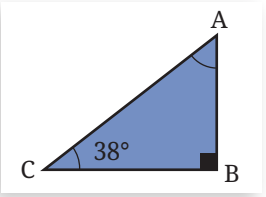
## À QUOI ÇA SERT ?

La trigonométrie est un domaine des mathématiques qui permet de déterminer des distances à l'aide de rapports entre les angles d'une figure. On utilise la trigonométrie dans divers domaines tels que la construction, la navigation, l'orientation dans l'espace et l'arpentage.

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

**1.** Déterminez la mesure de l'angle A dans chacun des triangles suivants.

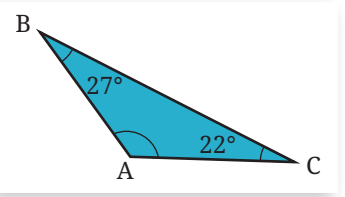
**a**




$180 - (90 + 38) = 52°$

**RÉPONSE** $m\angle A = 52°$

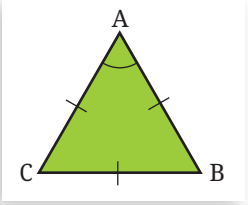
**c**




$180 - (27 + 22) = 131°$

**RÉPONSE** $m\angle A = 131°$

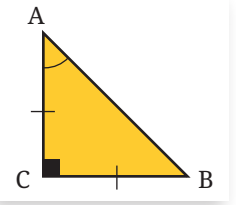
**b**




$180 \div 3 = 60°$

**RÉPONSE** $m\angle A = 60°$

**d**

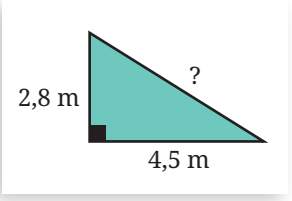



$(180 - 90) \div 2 = 45°$

**RÉPONSE** $m\angle A = 45°$

**2.** Calculez la mesure manquante dans chaque triangle.

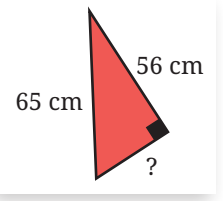
**a**




$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 4{,}5^2 + 2{,}8^2$
$c^2 = 28{,}09$
$c = 5{,}3$

**RÉPONSE** 5,3 m

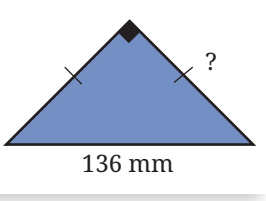
**b**




$c^2 = a^2 + b^2$
$65^2 = 56^2 + b^2$
$1089 = b^2$
$33 = b$

**RÉPONSE** 33 cm

**c**




$c^2 = a^2 + b^2$
$136^2 = x^2 + x^2$
$18\,496 = 2x^2$
$9\,248 = x^2$
$96{,}17 \approx x$

**RÉPONSE** $\approx$ 96,17 mm

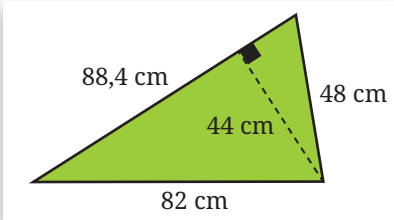
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★3. Calculez l'aire des triangles suivants.

**a**



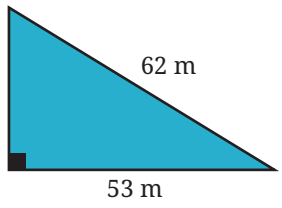

$A = \frac{bh}{2}$

$A = \frac{88{,}4 \cdot 44}{2}$

$A = 1944{,}8 \text{ cm}^2$

**RÉPONSE** 1944,8 cm²

**b**




$c^2 = a^2 + b^2$

$62^2 = 53^2 + b^2$

$1035 = b^2$

$32{,}17 \text{ m} \approx b$

$A = \frac{bh}{2}$

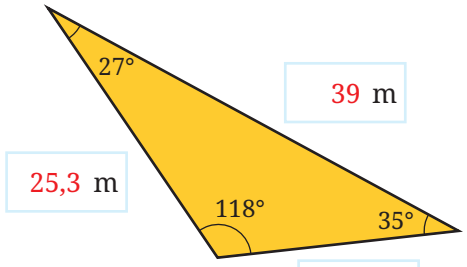
$A = \frac{53 \cdot 32{,}17}{2}$

$A \approx 852{,}51 \text{ m}^2$

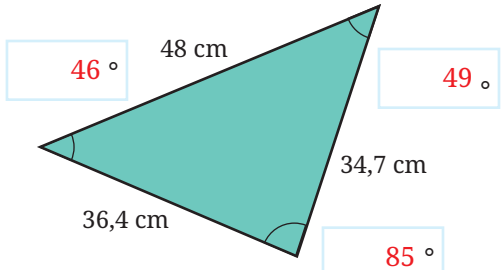
**RÉPONSE** ≈ 852,51 m²

★4. Écrivez les trois mesures au bon endroit dans chaque triangle.

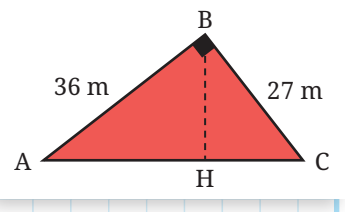
**a** **20,1 m** **25,3 m** **39 m**




**b** **46°** **49°** **85°**




★★5. Déterminez la mesure de la hauteur BH du triangle ci-contre.




**1** Mesure du segment AC

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 36^2 + 27^2$

$c^2 = 2025$

$c = 45 \text{ m}$

**2** Aire du triangle

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$A = \frac{36 \cdot 27}{2}$

$A = 486 \text{ m}^2$

**3** Mesure du segment BH

$A = \frac{b \cdot h}{2}$

$486 = \frac{45 \cdot \square}{2}$

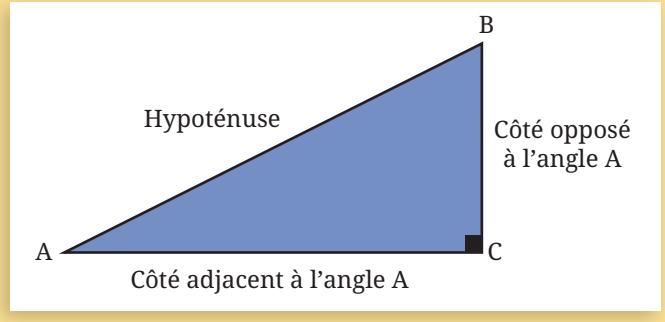
$21{,}6 \text{ m} = h$

**RÉPONSE** La hauteur BH du triangle mesure 21,6 m.

# 6.1 LES RAPPORTS TRIGONOMÉTRIQUES DANS LES TRIANGLES RECTANGLES

## Déterminer les mesures d'un côté à l'aide des rapports trigonométriques

Les fonctions sinus, cosinus et tangente sont des rapports entre les différents côtés d'un triangle rectangle.

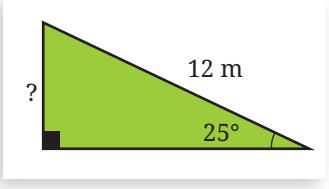



Les trois rapports trigonométriques relatifs à l'angle A sont résumés dans le tableau ci-dessous.

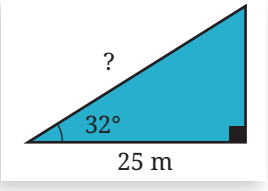
| RAPPORT TRIGONOMÉTRIQUE | NOTATION |
|---|---|
| sinus $\angle A = \dfrac{\text{Mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{Mesure de l'hypoténuse}}$ | $\sin A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$ |
| cosinus $\angle A = \dfrac{\text{Mesure du côté adjacent à l'angle A}}{\text{Mesure de l'hypoténuse}}$ | $\cos A = \dfrac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$ |
| tangente $\angle A = \dfrac{\text{Mesure du côté opposé à l'angle A}}{\text{Mesure du côté adjacent à l'angle A}}$ | $\tan A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$ |

**EXEMPLE**

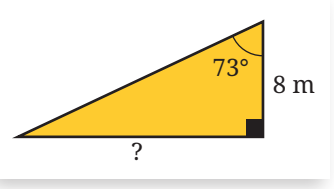
**Déterminer la mesure manquante dans chaque triangle.**




$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$
$$\sin(25) = \frac{\square}{12}$$
$$12 \cdot \sin(25) = x$$
$$5{,}07 \text{ m} \approx x$$




$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$
$$\cos(32) = \frac{25}{\square}$$
$$x \cdot \cos(32) = 25$$
$$x = \frac{25}{\cos(32)}$$
$$x \approx 29{,}48 \text{ m}$$




$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$
$$\tan(73) = \frac{\square}{8}$$
$$8 \cdot \tan(73) = x$$
$$26{,}17 \text{ m} \approx x$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

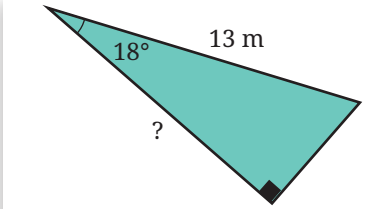
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★1. À l'aide des rapports trigonométriques, calculez la mesure manquante dans les triangles suivants.

**a**




$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

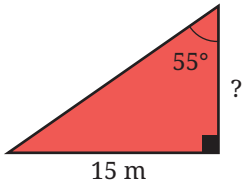
$\cos(18) = \frac{\square}{13}$

$13 \cdot \cos(18) = x$

$12{,}36 \approx x$

**RÉPONSE** $\approx 12{,}36$ m

**b**




$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Adjacent}}$

$\tan(55) = \frac{15}{\square}$

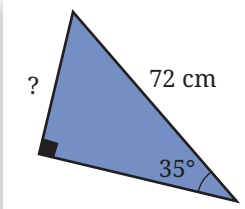
$x \cdot \tan(55) = 15$

$x = \frac{15}{\tan(55)}$

$x \approx 10{,}5$

**RÉPONSE** $\approx 10{,}5$ m

**c**




$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

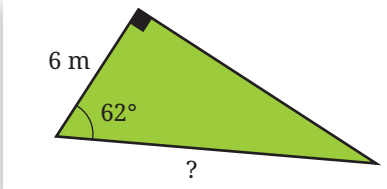
$\sin(35) = \frac{\square}{72}$

$72 \cdot \sin(35) = x$

$41{,}3 \approx x$

**RÉPONSE** $\approx 41{,}3$ cm

**d**




$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

$\cos(62) = \frac{6}{\square}$

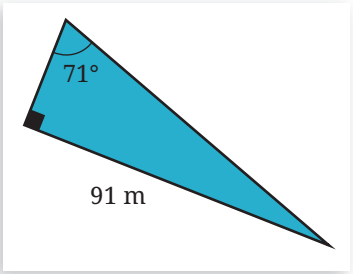
$x \cdot \cos(62) = 6$

$x = \frac{6}{\cos(62)}$

$x \approx 12{,}78$

**RÉPONSE** $\approx 12{,}78$ m

**★2.** Calculez la valeur de l'hypoténuse dans le triangle suivant.




$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin(71) = \frac{91}{x}$

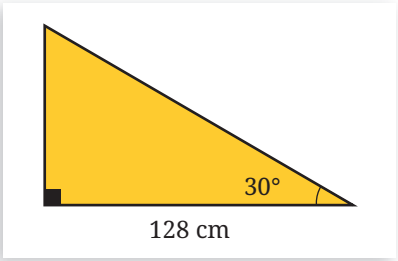
$x \cdot \sin(71) = 91$

$x = \frac{91}{\sin(71)}$

$x \approx 96{,}24$

**RÉPONSE** $\approx 96{,}24$ m

**★3.** Calculez la valeur du côté opposé dans le triangle suivant.




$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(30) = \frac{x}{128}$

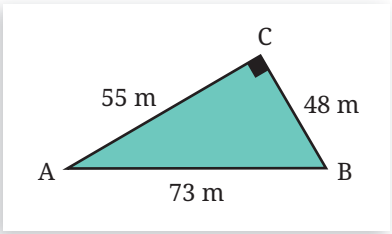
$128 \cdot \tan(30) = x$

$73{,}9 \approx x$

**RÉPONSE** $\approx 73{,}9$ cm

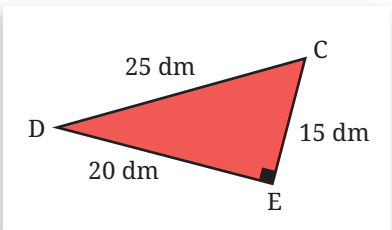
**★4.** Indiquez le rapport correspondant au sinus, au cosinus et à la tangente des angles aigus des triangles rectangles ci-dessous.

**a**




| | SINUS | COSINUS | TANGENTE |
|---|---|---|---|
| A | $\frac{48}{73}$ | $\frac{55}{73}$ | $\frac{48}{55}$ |
| B | $\frac{55}{73}$ | $\frac{48}{73}$ | $\frac{55}{48}$ |

**b**




| | SINUS | COSINUS | TANGENTE |
|---|---|---|---|
| C | $\frac{20}{25}$ | $\frac{15}{25}$ | $\frac{20}{15}$ |
| D | $\frac{15}{25}$ | $\frac{20}{25}$ | $\frac{15}{20}$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

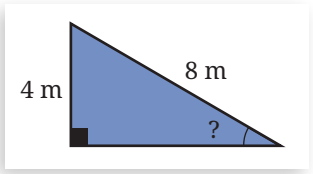
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Déterminer la mesure d'un angle à l'aide des rapports trigonométriques

Les fonctions arc sinus ($\sin^{-1}$), arc cosinus ($\cos^{-1}$) et arc tangente ($\tan^{-1}$) permettent de déterminer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle au moyen des rapports trigonométriques.

**EXEMPLE**

**Déterminer la mesure manquante dans chaque triangle.**



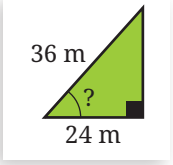

$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin x = \frac{4}{8}$$

$$\sin x = 0{,}5$$

$$x = \sin^{-1}(0{,}5)$$

$$x = 30°$$



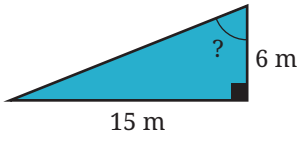

$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos x = \frac{24}{36}$$

$$\cos x = \frac{2}{3}$$

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$x \approx 48{,}19°$$




$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan x = \frac{15}{6}$$

$$\tan x = 2{,}5$$

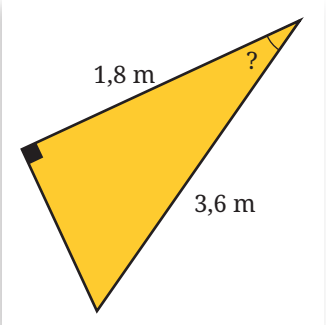
$$x = \tan^{-1}(2{,}5)$$

$$x \approx 68{,}2°$$

## EXERCICES

★1. À l'aide des rapports trigonométriques, déterminez la mesure manquante dans les triangles suivants.

**a**




$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos x = \frac{1{,}8}{3{,}6}$$

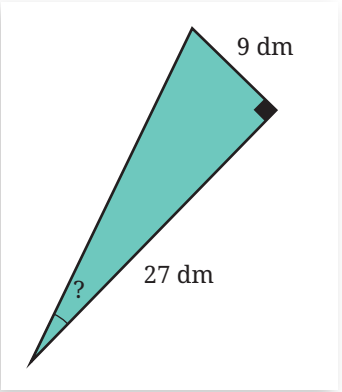
$$\cos x = 0{,}5$$

$$x = \cos^{-1}(0{,}5)$$

$$x \approx 60°$$

**RÉPONSE** $x \approx 60°$

**b**




$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan x = \frac{9}{27}$$

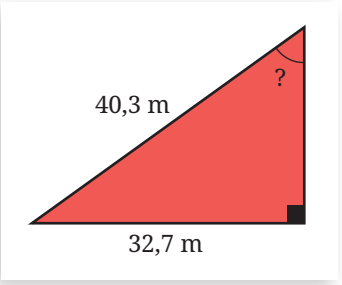
$$\tan x = \frac{1}{3}$$

$$x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$x \approx 18{,}43°$$

**RÉPONSE** $x \approx 18{,}43°$

**c**




$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin x = \frac{32{,}7}{40{,}3}$$

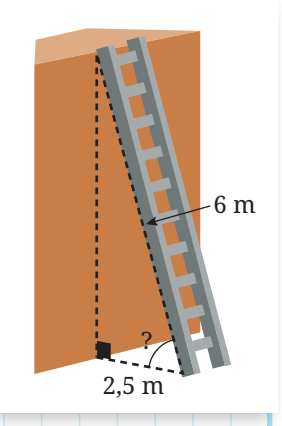
$$\sin x = \frac{327}{403}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{327}{403}\right)$$

$$x \approx 54{,}23°$$

**RÉPONSE** $x \approx 54{,}23°$

**2.** Une échelle de 6 m est appuyée sur un mur duquel elle se trouve à une distance au sol de 2,5 m. Quel est l'angle d'élévation entre le sol et l'échelle ?




$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos x = \frac{2{,}5}{6}$$

$$\cos x = \frac{5}{12}$$

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

$$x \approx 65{,}38°$$

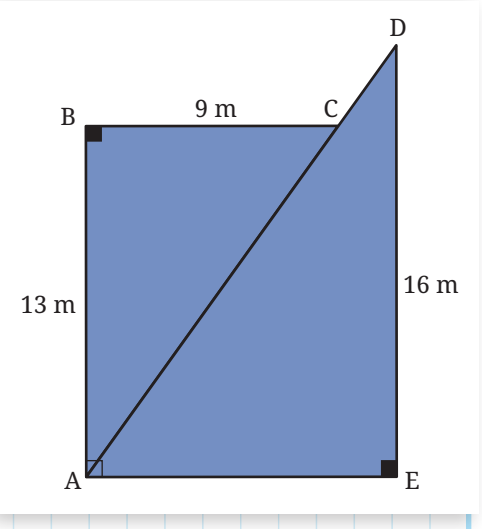
**RÉPONSE** L'angle d'élévation mesure environ 65,38°.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**3.** Déterminez la mesure de $\overline{CD}$ dans le schéma ci-contre.




**1** Mesure de $\overline{AC}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9^2 + 13^2$

$c^2 = 250$

$c \approx 15{,}811\ 4$

**2** Mesure de $\angle CAB$

$\tan x = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan x = \dfrac{9}{13}$

$x = \tan^{-1}\left(\dfrac{9}{13}\right)$

$m\angle CAB \approx 34{,}695\ 2°$

**3** Mesure de $\angle DAE$

$90 - 34{,}695\ 2 \approx 55{,}304\ 8°$

**4** $m\overline{AD}$

$\sin A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin(55{,}304\ 8) = \dfrac{16}{\square}$

$x \cdot \sin(55{,}304\ 8) = 16$

$x = \dfrac{16}{\sin(55{,}304\ 8)}$

$x \approx 19{,}460\ 2$

**5** Mesure de $\overline{CD}$

$19{,}460\ 2 - 15{,}811\ 4 \approx 3{,}65$

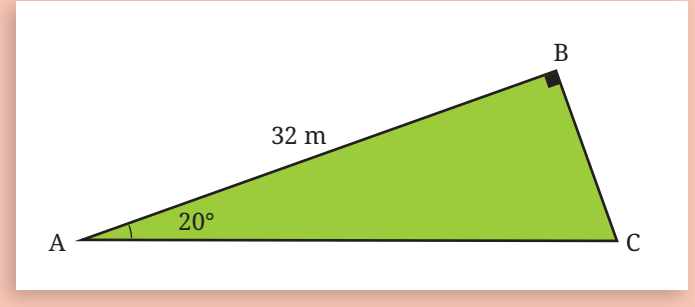
**RÉPONSE** $\overline{CD}$ mesure environ 3,65 m.

## Résoudre un triangle rectangle

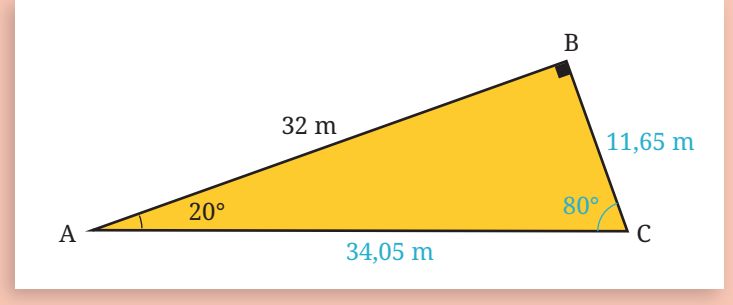
Résoudre un triangle rectangle signifie en trouver la mesure de tous les angles et côtés.

**EXEMPLE**

**Résoudre le triangle ci-dessous.**




| | |
|---|---|
| **1.** Trouver la mesure de l'angle C. | 90 – 20 = 70° (complémentaire à l'angle A) |
| **2.** Trouver la mesure du segment AC. | $\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$<br>$\cos(20) = \frac{32}{\square}$<br>$x \cdot \cos(20) = 32$<br>$x = \frac{32}{\cos(20)}$<br>$x \approx 34{,}05$ m |
| **3.** Trouver la mesure du segment BC. | $\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$<br>$\sin(20) = \frac{\square}{34{,}05}$<br>$34{,}05 \cdot \sin(20) = x$<br>$11{,}65 \text{ m} \approx x$ |




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

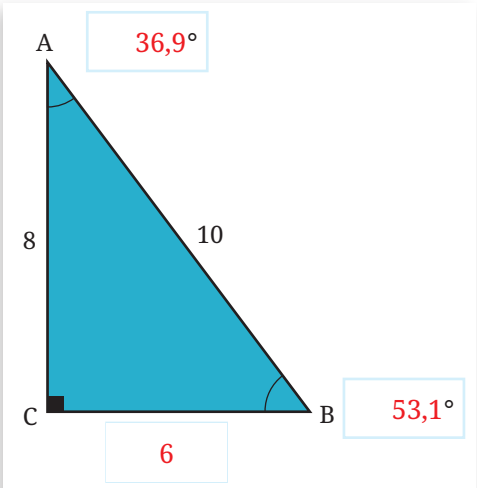
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★★1. Résolvez les triangles ci-dessous. Écrivez les mesures sur les figures et arrondissez-les au dixième près.

**a**




**1** $m\angle A$

$\cos A = \dfrac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

$\cos A = \dfrac{8}{10}$

$m\angle A = \cos^{-1}(0{,}8)$

$m\angle A \approx 36{,}9°$

**2** $m\angle B$

$90 - 36{,}9 \approx 53{,}1°$

**3** $m\overline{BC}$

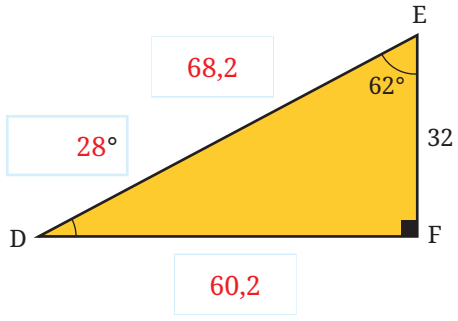
$\sin A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin(36{,}9) = \dfrac{\square}{10}$

$10 \cdot \sin(36{,}9) = x$

$6 \approx x$

**b**




**1** $m\angle D$

$90 - 62 = 28°$

**2** $m\overline{DE}$

$\sin D = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin(28) = \dfrac{32}{\square}$

$x \cdot \sin(28) = 32$

$x = \dfrac{32}{\sin(28)}$

$x \approx 68{,}2$

**3** $m\overline{DF}$

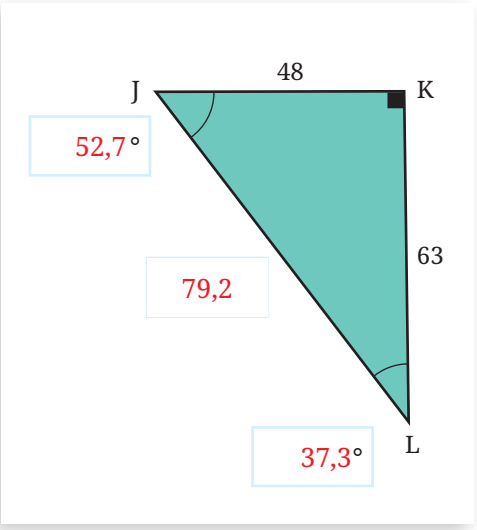
$\tan E = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(62) = \dfrac{\square}{32}$

$32 \cdot \tan(62) = x$

$60{,}2 \approx x$

**c**




**1** $m\angle L$

$\tan L = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan L = \dfrac{48}{63}$

$m\angle L = \tan^{-1}\left(\dfrac{48}{63}\right)$

$m\angle L \approx 37{,}3°$

**2** $m\angle J$

$90 - 37{,}3 \approx 52{,}7°$

**3** $m\overline{JL}$

$\sin L = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

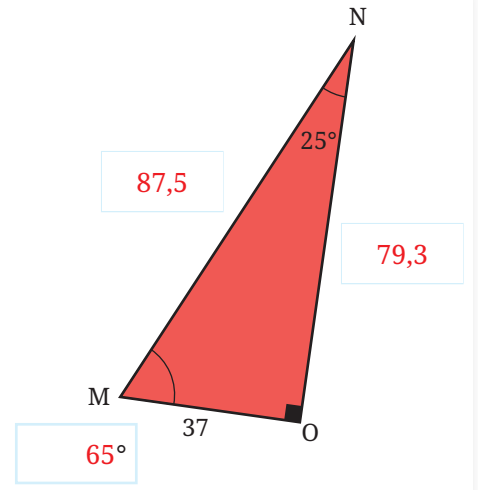
$\sin(37{,}3) = \dfrac{48}{\square}$

$x \cdot \sin(37{,}3) = 48$

$x = \dfrac{48}{\sin(37{,}3)}$

$x \approx 79{,}2$

**d**




**1** $m\angle M$

$90 - 25 = 65°$

**2** $m\overline{ON}$

$\tan N = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(25) = \dfrac{37}{\square}$

$x \cdot \tan(25) = 37$

$x = \dfrac{37}{\tan(25)}$

$x \approx 79{,}3$

**3** $m\overline{OM}$

$\sin N = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin(25) = \dfrac{37}{\square}$

$x \cdot \sin(25) = 37$

$x = \dfrac{37}{\sin(25)}$

$x \approx 87{,}5$

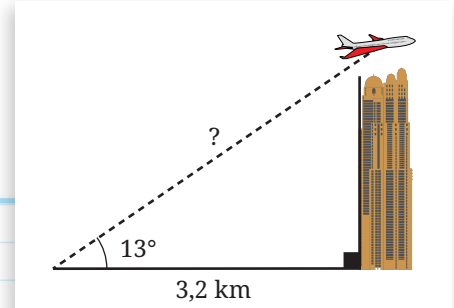
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**2.** Lors du décollage d'un avion, l'angle d'élévation à partir du sol est de 13°. Quelle distance a parcourue l'avion lorsqu'il passe au-dessus d'une tour se trouvant à 3,2 km de la piste d'embarquement ?




$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

$\cos(13) = \frac{3{,}2}{\square}$

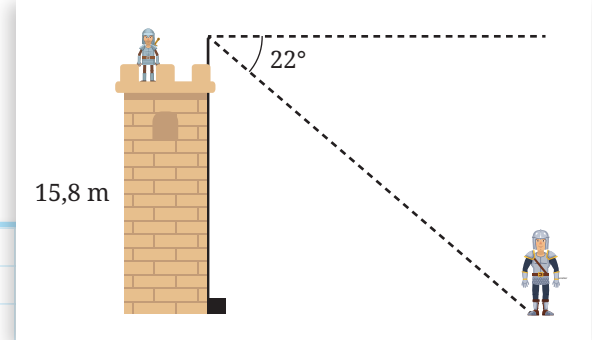
$x \cdot \cos(13) = 3{,}2$

$x = \frac{3{,}2}{\cos(13)}$

$x \approx 3{,}28$

**RÉPONSE** L'avion a parcouru une distance de 3,28 km.

★**3.** Un archer est posté au sommet d'une tour de 15,8 m de haut. Il observe un chevalier qui revient au loin selon un angle de dépression de 22°. Quelle distance sépare le chevalier de la tour ?




$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(22) = \frac{15{,}8}{\square}$

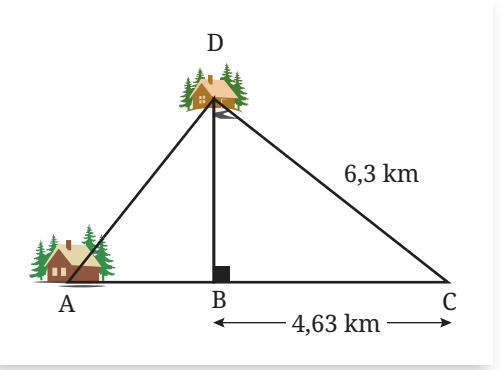
$x \cdot \tan(22) = 15{,}8$

$x = \frac{15{,}8}{\tan(22)}$

$x \approx 39{,}11$

**RÉPONSE** La distance qui sépare le chevalier de la tour est de 39,11 m.

★★**4.** Miguel fait une escapade en forêt. Après une halte au chalet A, il désire se rendre au chalet D. Quelle distance doit-il parcourir si l'angle A mesure 15° de plus que l'angle C ?




**1** Mesure de l'angle C

$$\cos C = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos C = \frac{4{,}63}{6{,}3}$$

$$\cos C = \frac{463}{630}$$

$$m\angle C = \cos^{-1}\left(\frac{463}{630}\right)$$

$$m\angle C \approx 42{,}699\,5°$$

**2** Mesure de l'angle A

$$42{,}699\,5 + 15 = 57{,}699\,5°$$

**3** Mesure de $\overline{BD}$

$$\tan C = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(42{,}699\,5) = \frac{\square}{4{,}63}$$

$$4{,}63 \cdot \tan(42{,}699\,5) = x$$

$$4{,}272\,4 \approx x$$

**4** Mesure de $\overline{AD}$

$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin(57{,}699\,5) = \frac{4{,}272\,4}{\square}$$

$$x \cdot \sin(57{,}699\,5) = 4{,}272\,4$$

$$x = \frac{4{,}272\,4}{\sin(57{,}699\,5)}$$

$$x \approx 5{,}05$$

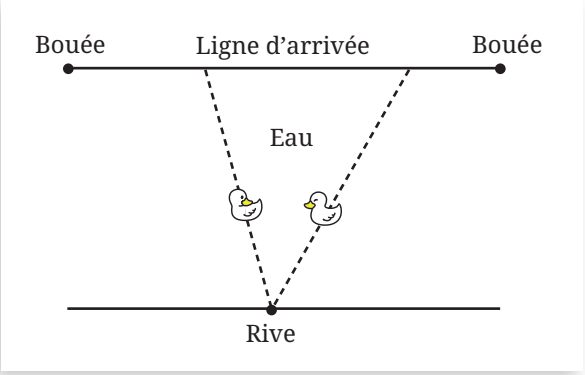
**RÉPONSE** Miguel doit parcourir 5,05 km pour se rendre au chalet D.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**5.** On dépose de petits canards au bord de la rivière en préparation pour une course. Le premier canard qui atteindra la ligne d'arrivée, située à 800 m de la rive, sera déclaré vainqueur.

Le canard de Cathy part vers la gauche du point de départ avec un angle de 75° par rapport à la rive, tandis que celui de Charlyne part vers la droite avec un angle de 60° par rapport à la rive. Déterminez la distance entre les deux canards à la ligne d'arrivée.




**1** Distance parcourue par le canard de Charlyne

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(60) = \frac{800}{\square}$$

$$x \cdot \tan(60) = 800$$

$$x = \frac{800}{\tan(60)}$$

$$x \approx 461{,}880\ 2$$

**2** Distance parcourue par le canard de Cathy

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(75) = \frac{800}{\square}$$

$$x \cdot \tan(75) = 800$$

$$x = \frac{800}{\tan(75)}$$

$$x \approx 214{,}359\ 4$$

**3** Distance entre les deux canards

$461{,}880\ 2 + 214{,}359\ 4 \approx 676{,}24$

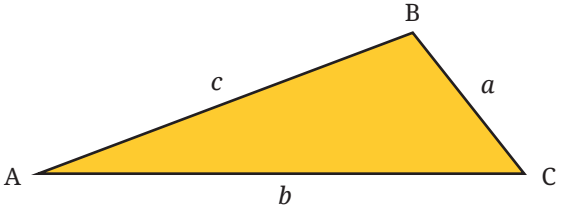
**RÉPONSE** La distance entre les deux canards à la ligne d'arrivée est de 676,24 m.

# 6.2 LA LOI DES SINUS

## Déterminer les mesures d'un triangle quelconque à l'aide de la loi des sinus

La loi des sinus permet de déterminer les mesures des angles et des côtés d'un triangle quelconque. En fait, les mesures des côtés opposés à un angle sont proportionnelles au sinus des mesures des angles.

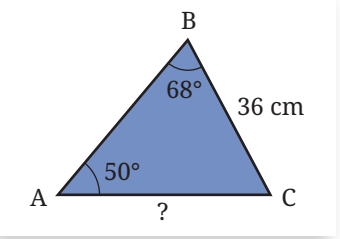
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$




**EXEMPLE**

**Déterminer la mesure manquante dans chaque triangle.**

**1.** Calculer la mesure d'un côté lorsqu'on connaît la mesure de deux angles et d'un côté.



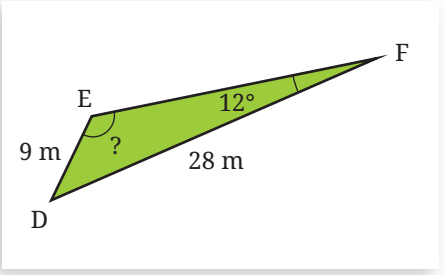

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{36}{\sin(50)} = \frac{\square}{\sin(68)}$$

$$\frac{36 \cdot \sin(68)}{\sin(50)} = b$$

$$43{,}57 \text{ cm} \approx b$$

**2.** Calculer la mesure d'un angle lorsqu'on connaît la mesure de deux côtés et d'un angle opposé à l'un de ces côtés.




$$\frac{e}{\sin E} = \frac{f}{\sin F}$$

$$\frac{28}{\sin E} = \frac{9}{\sin(12)}$$

$$28 \cdot \sin(12) = 9 \cdot \sin E$$

$$\frac{28 \cdot \sin(12)}{9} = \sin E$$

$$0{,}646\,8 \approx \sin E$$

$$\sin^{-1}(0{,}646\,8) \approx m\angle E$$

$$40{,}3° \approx m\angle E$$

Lorsqu'on calcule la mesure d'un angle à l'aide de la loi des sinus, on obtient toujours un angle aigu. Ici, comme la figure le montre, l'angle est obtus. On calcule donc l'angle supplémentaire à l'angle obtenu.

$$m\angle E = 180 - 40{,}3 \approx 139{,}7°$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

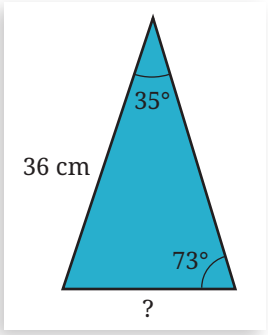
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★1. Calculez la mesure du côté manquant dans chaque triangle à l'aide de la loi des sinus.

**a**




$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

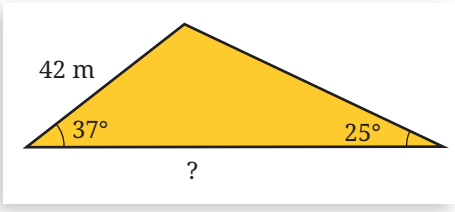
$$\frac{\square}{\sin(35)} = \frac{36}{\sin(73)}$$

$$a = \frac{36 \cdot \sin(35)}{\sin(73)}$$

$$a \approx 21{,}59$$

**RÉPONSE** $a \approx 21{,}59$ cm

**b**




Mesure de l'angle obtus

$180 - (37 + 25) = 118°$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

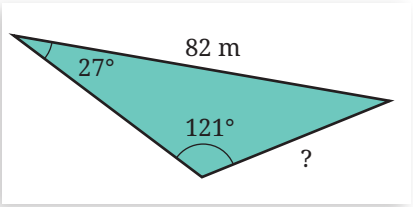
$$\frac{\square}{\sin(118)} = \frac{42}{\sin(25)}$$

$$a = \frac{42 \cdot \sin(118)}{\sin(25)}$$

$$a \approx 87{,}75$$

**RÉPONSE** $a \approx 87{,}75$ m

**c**




$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

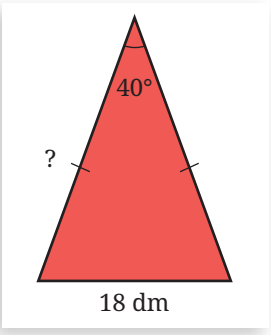
$$\frac{82}{\sin(121)} = \frac{\square}{\sin(27)}$$

$$\frac{82 \cdot \sin(27)}{\sin(121)} = b$$

$$43{,}43 \approx b$$

**RÉPONSE** $b \approx 43{,}43$ m

**d**




Mesure d'un des angles isométriques

$(180 - 40) \div 2 = 70°$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\square}{\sin(70)} = \frac{18}{\sin(40)}$$

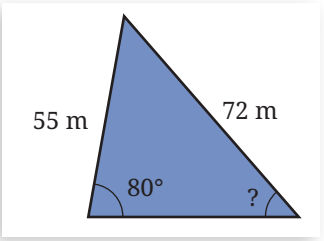
$$a = \frac{18 \cdot \sin(70)}{\sin(40)}$$

$$a \approx 26{,}31$$

**RÉPONSE** $a \approx 26{,}31$ dm

★**2.** Déterminez, au dixième près, la mesure manquante dans les triangles ci-dessous à l'aide de la loi des sinus.

**a**




$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{55}{\sin A} = \frac{72}{\sin (80)}$

$55 \cdot \sin (80) = 72 \cdot \sin A$

$\frac{55 \cdot \sin (80)}{72} = \sin A$

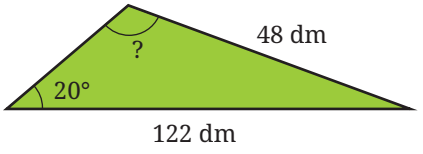
$0{,}752\,3 \approx \sin A$

$\sin^{-1} (0{,}752\,3) \approx m\angle A$

$48{,}8° \approx m\angle A$

**RÉPONSE** $\approx 48{,}8°$

**b**




$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{48}{\sin (20)} = \frac{122}{\sin B}$

$48 \cdot \sin B = 122 \cdot \sin (20)$

$\sin B = \frac{122 \cdot \sin (20)}{48}$

$\sin B \approx 0{,}869\,3$

$m\angle B \approx \sin^{-1} (0{,}869\,3)$

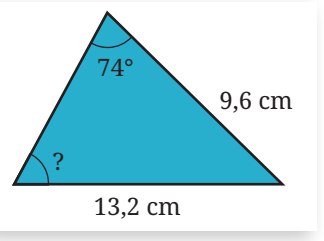
$m\angle B \approx 60{,}4°$

Mesure de l'angle obtus

$180 - 60{,}4 \approx 119{,}6°$

**RÉPONSE** $\approx 119{,}6°$

**c**




$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{13{,}2}{\sin (74)} = \frac{9{,}6}{\sin B}$

$13{,}2 \cdot \sin B = 9{,}6 \cdot \sin (74)$

$\sin B = \frac{9{,}6 \cdot \sin (74)}{13{,}2}$

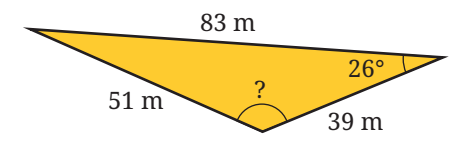
$\sin B \approx 0{,}699\,1$

$m\angle B \approx \sin^{-1} (0{,}699\,1)$

$m\angle B \approx 44{,}4°$

**RÉPONSE** $\approx 44{,}4°$

**d**




$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{51}{\sin (26)} = \frac{83}{\sin B}$

$51 \cdot \sin B = 83 \cdot \sin (26)$

$\sin B = \frac{83 \cdot \sin (26)}{51}$

$\sin B \approx 0{,}713\,4$

$m\angle B \approx \sin^{-1} (0{,}713\,4)$

$m\angle B \approx 45{,}5°$

Mesure de l'angle obtus

$180 - 45{,}5 \approx 134{,}5°$

**RÉPONSE** $\approx 134{,}5°$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

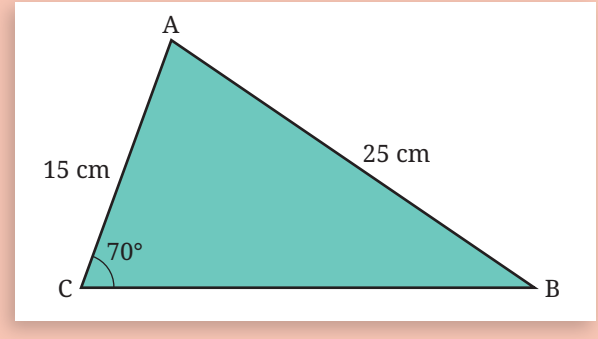
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Résoudre un triangle quelconque

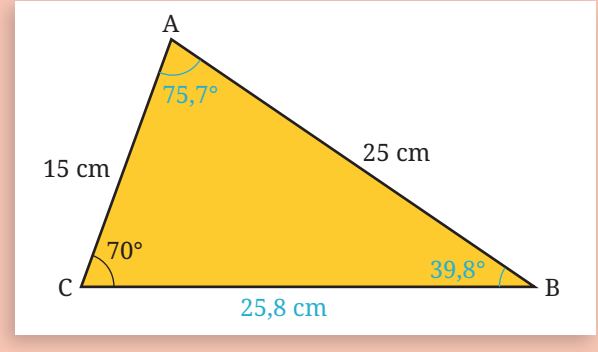
Résoudre un triangle signifie en trouver la mesure de tous les angles et côtés.
La loi des sinus permet de résoudre certains triangles quelconques.

**EXEMPLE**

**Résoudre le triangle ci-dessous.**



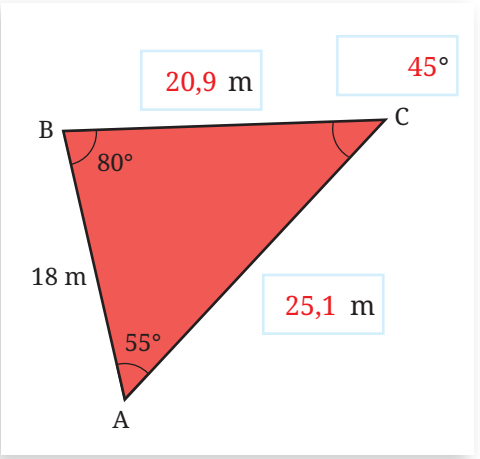

| | |
|---|---|
| **1.** Trouver la mesure de l'angle B. | $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$<br>$\frac{15}{\sin B} = \frac{25}{\sin (70)}$<br>$15 \cdot \sin (70) = 25 \cdot \sin B$<br>$\frac{15 \cdot \sin (70)}{25} = \sin B$<br>$0{,}563\,8 \approx \sin B$<br>$\sin^{-1} (0{,}563\,8) \approx \text{m}\angle B$<br>$34{,}319° \approx \text{m}\angle B$ |
| **2.** Trouver la mesure de l'angle A. | $180 - (70 + 34{,}319) \approx 75{,}681°$ |
| **3.** Trouver la mesure du segment BC. | $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$<br>$\frac{\square}{\sin (75{,}681)} = \frac{25}{\sin (70)}$<br>$a \cdot \sin (70) = 25 \cdot \sin (75{,}681)$<br>$\square = \frac{25 \cdot \sin (75{,}681)}{\sin (70)}$<br>$a \approx 25{,}78 \text{ cm}$ |



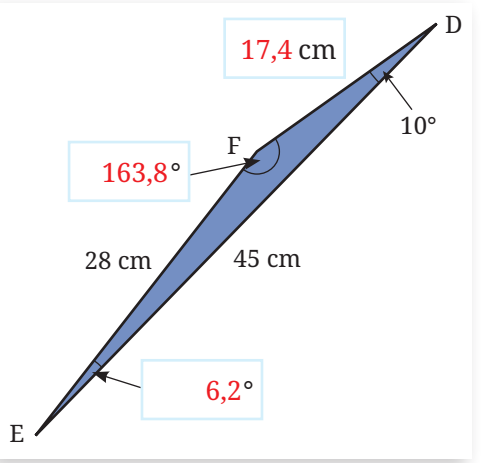
# EXERCICES

★★**1.** Résolvez les triangles suivants et écrivez les mesures sur l'image en les arrondissant au dixième.

**a**




**b**




**1** $m\angle C$

$180 - (80 + 55) = 45°$

$m\overline{BC}$

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{\square}{\sin(55)} = \frac{18}{\sin(45)}$

$a = \frac{18 \cdot \sin(55)}{\sin(45)}$

$a \approx 20{,}9$ m

**2** $m\overline{AC}$

$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\frac{\square}{\sin(80)} = \frac{18}{\sin(45)}$

$b = \frac{18 \cdot \sin(80)}{\sin(45)}$

$b \approx 25{,}1$ m

**1** $m\angle F$

$\frac{d}{\sin D} = \frac{f}{\sin F}$

$\frac{28}{\sin(10)} = \frac{45}{\sin F}$

$28 \cdot \sin F = 45 \cdot \sin(10)$

$\sin F = \frac{45 \cdot \sin(10)}{28}$

$\sin F \approx 0{,}279\,1$

$m\angle F \approx \sin^{-1}(0{,}279\,1)$

$m\angle F \approx 16{,}2°$

Mesure de l'angle obtus

$m\angle F = 180 - 16{,}2 \approx 163{,}8°$

**2** $m\angle E$

$m\angle E = 180 - (163{,}8 + 10) \approx 6{,}2°$

**3** $m\overline{FD}$

$\frac{e}{\sin E} = \frac{d}{\sin D}$

$\frac{\square}{\sin(6{,}2)} = \frac{28}{\sin(10)}$

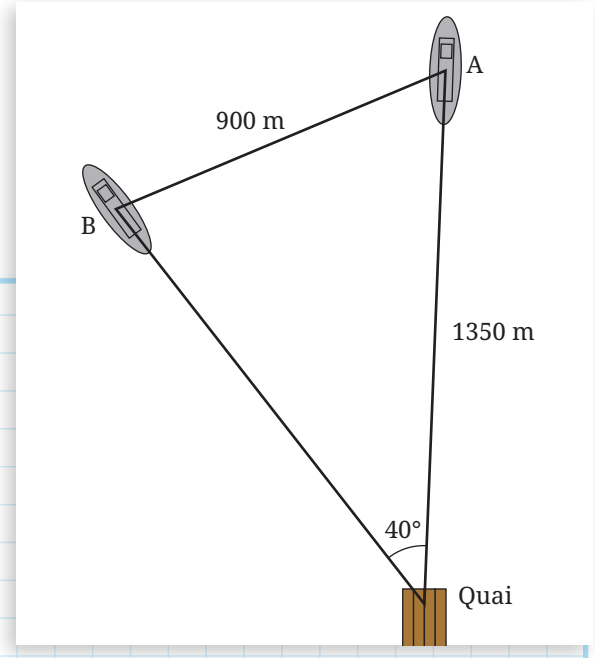
$e = \frac{28 \cdot \sin(6{,}2)}{\sin(10)}$

$e \approx 17{,}4$ cm

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Deux bateaux quittent un quai dans différentes directions. L'angle entre les deux trajectoires est de 40°. Quelle distance le bateau B a-t-il parcourue si le bateau A s'est déplacé de 1350 m et que 900 m séparent les deux bateaux ?




**1** $m\angle B$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{q}{\sin Q}$$

$$\frac{1350}{\sin B} = \frac{900}{\sin(40)}$$

$$1350 \cdot \sin(40) = 900 \cdot \sin B$$

$$\frac{1350 \cdot \sin(40)}{900} = \sin B$$

$$0{,}964\,2 \approx \sin B$$

$$\sin^{-1}(0{,}964\,2) \approx m\angle B$$

$$74{,}622\,6° \approx m\angle B$$

**2** $m\angle A$

$$180 - (74{,}622\,6 + 40) \approx 65{,}377\,4°$$

**3** Distance parcourue par le bateau B

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{q}{\sin Q}$$

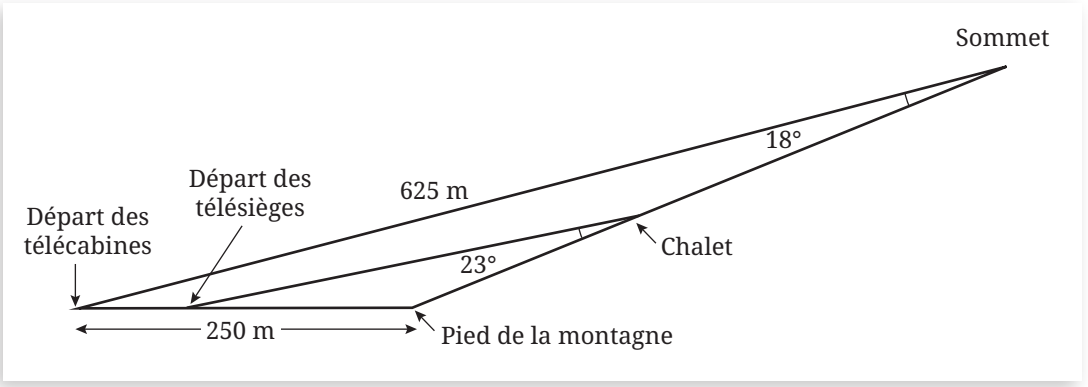
$$\frac{\square}{\sin(65{,}377\,4)} = \frac{900}{\sin(40)}$$

$$a = \frac{900 \cdot \sin(65{,}377\,4)}{\sin(40)}$$

$$a \approx 1272{,}84$$

**RÉPONSE** Le bateau B a parcouru une distance de 1272,84 m.

★★★ **3.** Une station de ski propose deux points de départ aux différentes pistes de son site. Pour accéder au sommet de la montagne, on doit utiliser les télécabines, alors que les télésièges permettent de se rendre au chalet. La distance qui sépare le départ des télécabines de celui des télésièges est de 65 m. Calculez la distance, au dixième près, entre le sommet et le chalet à l'aide du schéma ci-dessous.




**1** Mesure de l'angle au pied de la montagne

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{250}{\sin(18)} = \frac{625}{\sin B}$

$250 \cdot \sin B = 625 \cdot \sin(18)$

$\sin B = \frac{625 \cdot \sin(18)}{250}$

$\sin B \approx 0{,}772\,5$

$m\angle B \approx \sin^{-1}(0{,}772\,5)$

$m\angle B \approx 50{,}578\,9°$

**2** Mesure de l'angle obtus

$180 - 50{,}578\,9 \approx 129{,}421\,1°$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**3** Mesure de l'angle d'élévation des télécabines

$180 - (18 + 129{,}421\ 1) \approx 32{,}578\ 9°$

**4** Distance entre le pied de la montagne et le sommet

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\square}{\sin(32{,}578\ 9)} = \frac{250}{\sin(18)}$$

$a \cdot \sin(18) = 250 \cdot \sin(32{,}578\ 9)$

$$a = \frac{250 \cdot \sin(32{,}578\ 9)}{\sin(18)}$$

$a \approx 435{,}623\ 7$

**5** Distance entre le pied de la montagne et le départ des télésièges

$250 - 65 = 185$

**6** Mesure de l'angle d'élévation des télésièges

$180 - (23 + 129{,}421\ 1) \approx 27{,}578\ 9°$

**7** Distance entre le pied de la montagne et le chalet

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\square}{\sin(27{,}578\ 9)} = \frac{185}{\sin(23)}$$

$a \cdot \sin(23) = 185 \cdot \sin(27{,}578\ 9)$

$$a = \frac{185 \cdot \sin(27{,}578\ 9)}{\sin(23)}$$

$a \approx 219{,}202\ 9$

**8** Distance entre le chalet et le sommet

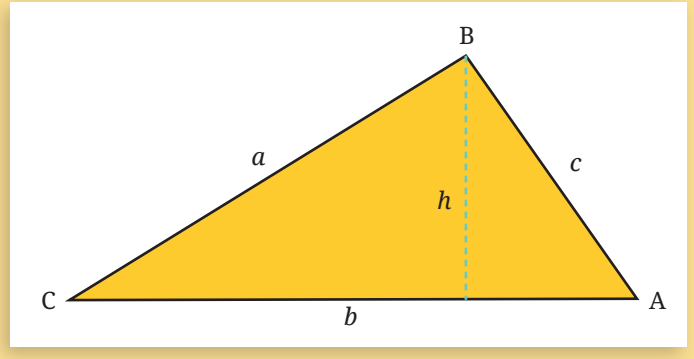
$435{,}623\ 7 - 219{,}202\ 9 \approx 216{,}4$

**RÉPONSE** La distance entre le sommet et le chalet est de 216,4 m.

# 6.3 L'AIRE DES TRIANGLES

## Déterminer l'aire d'un triangle à l'aide de la formule trigonométrique

Il est possible de calculer l'aire d'un triangle lorsqu'on connaît la mesure de deux des côtés de la figure et celle de l'angle se trouvant entre les deux côtés. Cette formule est dérivée de $A = \frac{b \cdot h}{2}$ à l'aide des rapports trigonométriques.



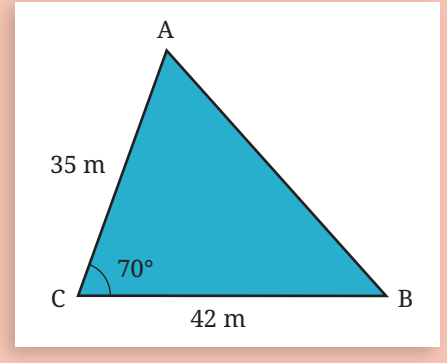

$$\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

où $\sin C = \frac{h}{a}$, donc $h = a \cdot \sin C$.

Si on remplace $h$ par sa valeur dans la formule d'aire, on obtient $A = \frac{b \cdot a \cdot \sin C}{2} = \frac{ab \sin C}{2}$.

**EXEMPLE**

**Déterminer l'aire du triangle ci-dessous.**




$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$A = \frac{42 \cdot 35 \cdot \sin 70}{2}$$

$$A \approx 690{,}67 \text{ m}^2$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

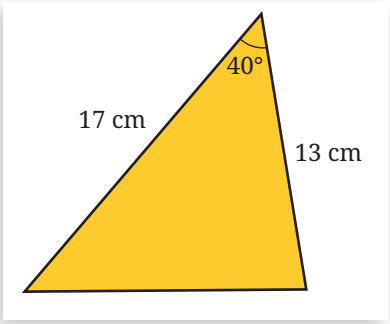
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★1. Calculez l'aire des triangles suivants.

**a**



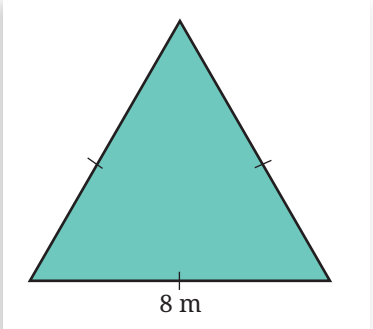

$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$A = \frac{17 \cdot 13 \cdot \sin(40)}{2}$$

$$A \approx 71{,}03 \text{ cm}^2$$

**RÉPONSE** $A \approx 71{,}03 \text{ cm}^2$

**b**



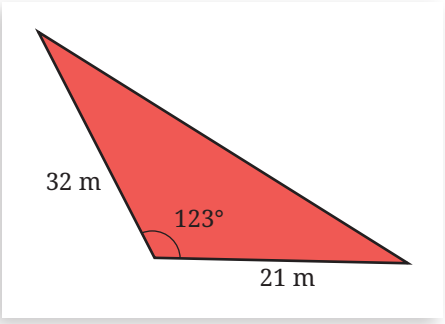

$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$A = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin(60)}{2}$$

$$A \approx 27{,}71 \text{ m}^2$$

**RÉPONSE** $A \approx 27{,}71 \text{ m}^2$

**c**



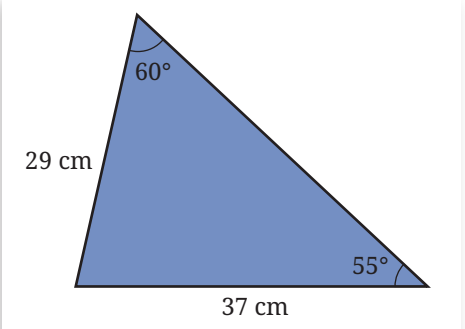

$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$A = \frac{21 \cdot 32 \cdot \sin(123)}{2}$$

$$A \approx 281{,}79 \text{ m}^2$$

**RÉPONSE** $A \approx 281{,}79 \text{ m}^2$

**d**




$$180 - (60 + 55) = 65°$$

$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

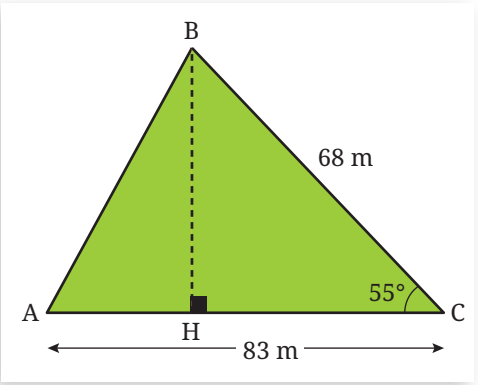
$$A = \frac{29 \cdot 37 \cdot \sin(65)}{2}$$

$$A \approx 486{,}23 \text{ cm}^2$$

**RÉPONSE** $A \approx 486{,}23 \text{ cm}^2$

★★**2.** Déterminez la hauteur BH des triangles ci-dessous.

**a**




**1** Aire du triangle

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

$A = \dfrac{68 \cdot 83 \cdot \sin(55)}{2}$

$A \approx 2311{,}65 \text{ m}^2$

**2** Mesure de $\overline{BH}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

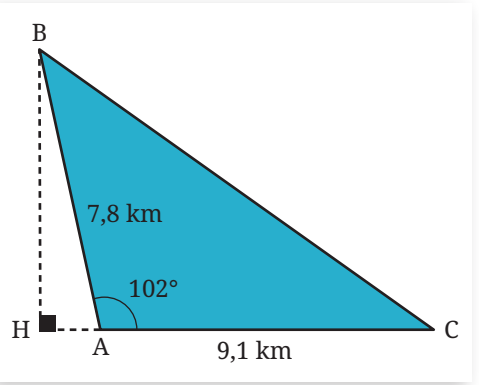
$2311{,}65 = \dfrac{83 \cdot \square}{2}$

$4623{,}3 = 83 \cdot h$

$55{,}7 \approx h$

**RÉPONSE** $h \approx 55{,}7$ m

**b**




**1** Aire du triangle

$A = \dfrac{bc \sin A}{2}$

$A = \dfrac{9{,}1 \cdot 7{,}8 \cdot \sin(102)}{2}$

$A \approx 34{,}71 \text{ km}^2$

**2** Mesure de $\overline{BH}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$34{,}71 = \dfrac{9{,}1 \cdot \square}{2}$

$69{,}42 = 9{,}1 \cdot h$

$7{,}63 \approx h$

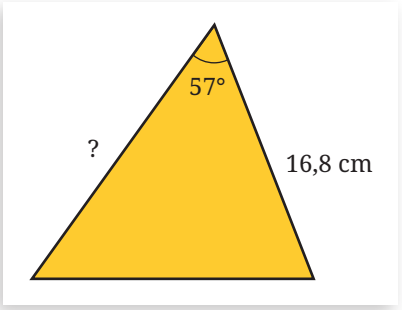
**RÉPONSE** $h \approx 7{,}63$ km

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★3. Déterminez la mesure manquante dans chaque triangle.

**a**




$A = 135{,}97 \text{ cm}^2$

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

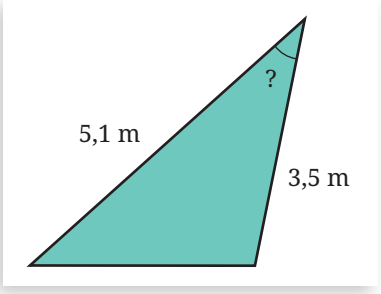
$135{,}97 = \dfrac{16{,}8 \bullet \square \bullet \sin(57)}{2}$

$135{,}97 \approx 7{,}044\,8 \bullet b$

$19{,}3 \approx b$

**RÉPONSE** $b \approx 19{,}3$ cm

**b**




$A = 5{,}25 \text{ m}^2$

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

$5{,}25 = \dfrac{5{,}1 \bullet 3{,}5 \bullet \sin C}{2}$

$5{,}25 = 8{,}925 \bullet \sin C$

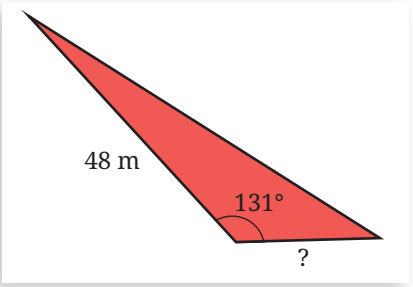
$0{,}588\,2 \approx \sin C$

$\sin^{-1}(0{,}588\,2) \approx \text{m}\angle C$

$36{,}03° \approx \text{m}\angle C$

**RÉPONSE** $\text{m}\angle C \approx 36{,}03°$

**c**




$A = 416{,}6 \text{ m}^2$

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

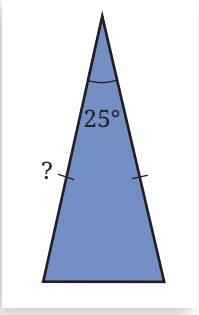
$416{,}6 = \dfrac{\square \bullet 48 \bullet \sin(131)}{2}$

$416{,}6 \approx a \bullet 18{,}113$

$23 \approx a$

**RÉPONSE** $a \approx 23$ m

**d**




$A = 17{,}12 \text{ dm}^2$

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

$17{,}12 = \dfrac{\square \bullet \square \bullet \sin(25)}{2}$

$17{,}12 = x^2 \bullet 0{,}211\,3$

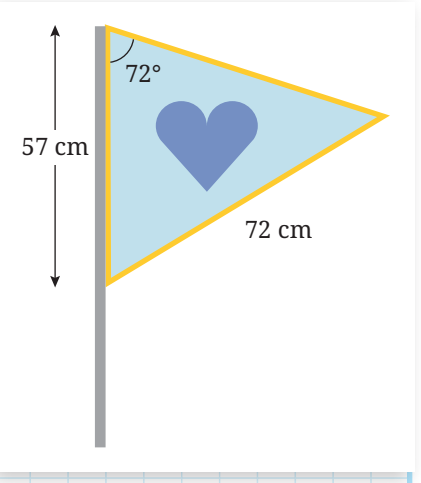
$81{,}022\,2 \approx x^2$

$9 \approx x$

**RÉPONSE** $x \approx 9$ dm

★★**4.** Delta est une compagnie qui organise des jeux grandeur nature. Sa dernière création se joue en équipe de quatre et consiste à voler des drapeaux. Les créateurs du jeu voudraient ajouter une bordure dorée ornant les trois côtés de chacun des quatre drapeaux. Voici une représentation d'un drapeau, qui a une aire de 1762 cm$^2$.

Quelle est la longueur de bordure dorée que les créateurs doivent utiliser pour un drapeau ?




**1** Mesure de l'angle entre 57 cm et 72 cm

$A = \frac{ab \sin C}{2}$

$1762 = \frac{57 \cdot 72 \cdot \sin C}{2}$

$1762 = 2052 \cdot \sin C$

$0{,}858\ 7 \approx \sin C$

$\sin^{-1}(0{,}858\ 7) \approx m\angle C$

$59{,}170\ 9° \approx m\angle C$

**2** Mesure du côté opposé à l'angle de 59,170 9°

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{\square}{\sin(59{,}170\ 9)} = \frac{72}{\sin(72)}$

$a \cdot \sin(72) = 72 \cdot \sin(59{,}170\ 9)$

$a = \frac{72 \cdot \sin(59{,}170\ 9)}{\sin(72)}$

$a \approx 65{,}008\ 1$

**3** Périmètre d'un drapeau

$72 + 57 + 65{,}008\ 1 \approx 194{,}01$

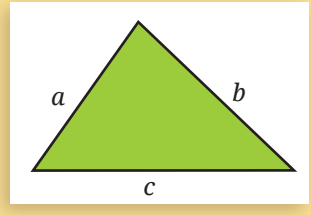
**RÉPONSE** La longueur de bordure dorée que les créateurs doivent utiliser pour un drapeau est de 194 cm.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Déterminer l'aire d'un triangle à l'aide de la formule de Héron

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle quelconque dont on connaît la mesure des trois côtés.




Pour un triangle quelconque, on utilise la formule ci-dessous.

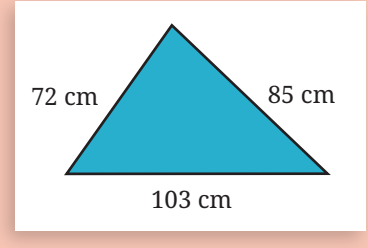
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p$ est le demi-périmètre du triangle.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

**EXEMPLE**

**Déterminer l'aire du triangle ci-dessous.**




$$p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$p = \frac{72+85+103}{2}$$
$$p = 130 \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{130(130-72)(130-85)(130-103)}$$
$$A = \sqrt{130 \cdot 58 \cdot 45 \cdot 27}$$
$$A = \sqrt{9\ 161\ 100}$$
$$A \approx 3\ 026{,}73 \text{ cm}^2$$

## EXERCICES

★**1.** Un champ est borné par trois rues qui mesurent respectivement 2,8 km, 3,3 km et 4,7 km. Quelle est la superficie de ce champ ?

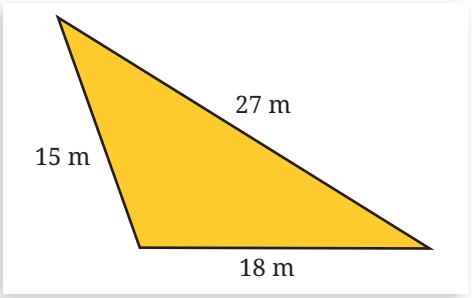
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$p = \frac{2{,}8+3{,}3+4{,}7}{2}$$
$$p = 5{,}4 \text{ km}$$

$$A = \sqrt{5{,}4(5{,}4-2{,}8)(5{,}4-3{,}3)(5{,}4-4{,}7)}$$
$$A = \sqrt{5{,}4 \cdot 2{,}6 \cdot 2{,}1 \cdot 0{,}7}$$
$$A = \sqrt{20{,}638\ 8}$$
$$A \approx 4{,}54 \text{ km}^2$$

**RÉPONSE** Ce champ a une superficie de 4,54 km².

★**2.** Calculez l'aire des triangles ci-dessous.

**a**




$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$p = \dfrac{15+27+18}{2}$

$p = 30 \text{ m}$

$A = \sqrt{30(30-15)(30-27)(30-18)}$

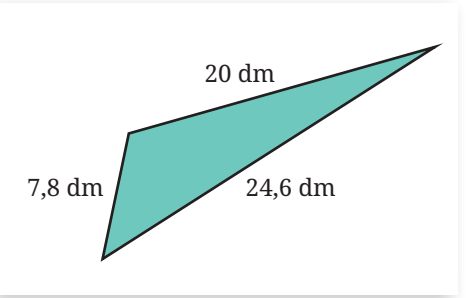
$A = \sqrt{30 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 12}$

$A = \sqrt{16\,200}$

$A \approx 127{,}28 \text{ m}^2$

**RÉPONSE** $A \approx 127{,}28 \text{ m}^2$

**b**




$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$p = \dfrac{7{,}8+20+24{,}6}{2}$

$p = 26{,}2 \text{ dm}$

$A = \sqrt{26{,}2(26{,}2-7{,}8)(26{,}2-20)(26{,}2-24{,}6)}$

$A = \sqrt{26{,}2 \cdot 18{,}4 \cdot 6{,}2 \cdot 1{,}6}$

$A = \sqrt{4782{,}233\,6}$

$A \approx 69{,}15 \text{ dm}^2$

**RÉPONSE** $A \approx 69{,}15 \text{ dm}^2$

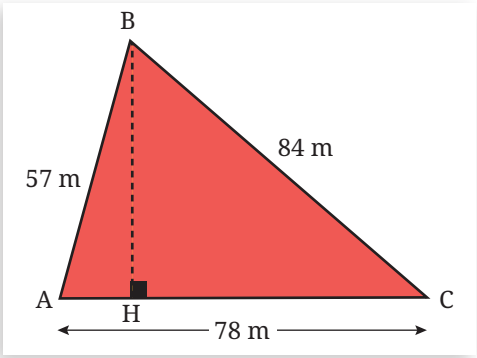
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**3.** Déterminez la hauteur BH des triangles ci-dessous.

**a**




**1** Aire du triangle

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{57+84+78}{2} = 109{,}5 \text{ m}$$

$$A = \sqrt{109{,}5(109{,}5-57)(109{,}5-84)(109{,}5-78)}$$

$$A = \sqrt{109{,}5 \cdot 52{,}5 \cdot 25{,}5 \cdot 31{,}5}$$

$$A \approx \sqrt{4\ 617\ 683{,}44}$$

$$A \approx 2148{,}88 \text{ m}^2$$

**2** Hauteur BH du triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

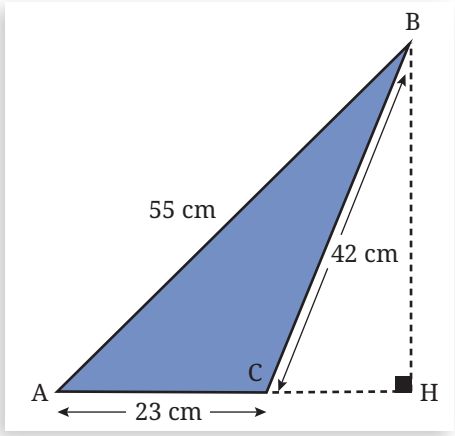
$$2148{,}88 = \frac{78 \cdot h}{2}$$

$$2148{,}88 = 39 \cdot h$$

$$55{,}1 \text{ m} \approx h$$

**RÉPONSE** $h \approx 55{,}1$ m

**b**




**1** Aire du triangle

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+55+42}{2} = 60 \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{60(60-23)(60-55)(60-42)}$$

$$A = \sqrt{60 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 18}$$

$$A \approx \sqrt{199\ 800}$$

$$A \approx 446{,}99 \text{ cm}^2$$

**2** Hauteur BH du triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

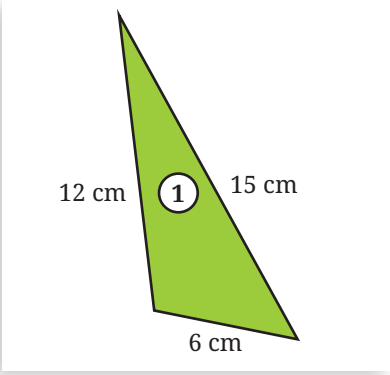
$$446{,}99 = \frac{23 \cdot h}{2}$$

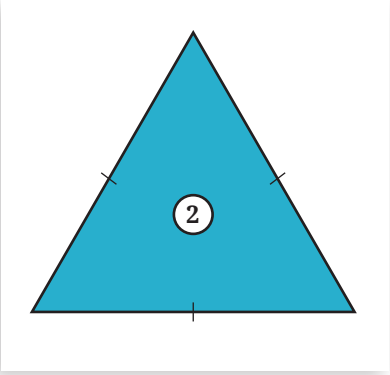
$$893{,}98 = 23 \cdot h$$

$$38{,}87 \text{ cm} \approx h$$

**RÉPONSE** $h \approx 38{,}87$ cm

★★**4.** Si les deux triangles ci-dessous ont la même aire, combien mesure chaque côté du triangle 2 ?




**1** Aire du triangle ①

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$p = \dfrac{12+15+6}{2}$

$p = 16{,}5 \text{ cm}$

$A = \sqrt{16{,}5(16{,}5-12)(16{,}5-15)(16{,}5-6)}$

$A = \sqrt{16{,}5 \bullet 4{,}5 \bullet 1{,}5 \bullet 10{,}5}$

$A = \sqrt{1169{,}437\ 5}$

$A \approx 34{,}2 \text{ cm}^2$

**2** Mesure d'un angle du triangle ②

$180 \div 3 = 60°$

**3** Mesure d'un côté du triangle ②

$A = \dfrac{ab \sin C}{2}$

$34{,}2 = \dfrac{\square \bullet \square \bullet \sin(60)}{2}$

$34{,}2 = x \bullet x \bullet 0{,}433$

$78{,}98 \approx x^2$

$8{,}89 \text{ cm} \approx x$

**RÉPONSE** Chaque côté du triangle ② mesure 8,89 cm.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

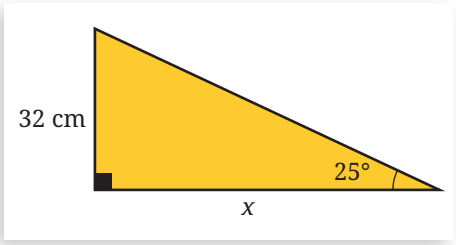
# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 6

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**1.** Quel rapport trigonométrique permet de déterminer la valeur de $x$ dans le triangle ci-contre ?



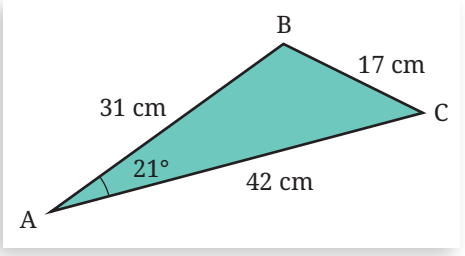

**a** $\sin(25) = \frac{32}{\square}$

**b** $\sin(25) = \frac{\square}{32}$

**c** $\tan(25) = \frac{32}{\square}$

**d** $\tan(25) = \frac{\square}{32}$

★**2.** Quelle est, à l'unité près, la mesure de l'angle B dans le triangle ci-contre ?




**a** 41°

**b** 62°

**c** 118°

**d** 139°

★★**3.** Quel énoncé est vrai ?

**a** Les rapports trigonométriques permettent de résoudre tous les types de triangles.

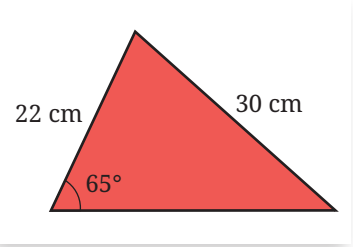
**b** Le cosinus d'un angle est équivalent au sinus de l'angle complémentaire à cet angle.

**c** Si le rapport de la tangente d'un angle est équivalent à 1, c'est que le triangle est équilatéral.

**d** On peut résoudre un triangle si on connaît la mesure de ses trois angles.

## CALCULS

★★**4.** Quelle est, à l'unité près, l'aire du triangle ci-contre ?




**a** 299 cm²

**b** 316 cm²

**c** 632 cm²

**d** 3797 cm²

★**5.** Quel énoncé est faux ?

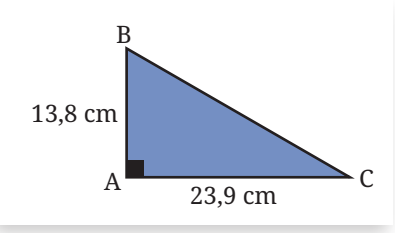
**a** Le rapport du cosinus d'un angle est toujours inférieur ou égal à 1.

**b** Le rapport du sinus d'un angle est toujours inférieur ou égal à 1.

**c** Le sinus d'un angle de 30° indique que l'hypoténuse mesure le double du côté opposé à l'angle de 30°.

**d** Le rapport de la tangente d'un angle est toujours inférieur ou égal à 1.

★★**6.** Quelle est la valeur du cosinus de l'angle B du triangle ABC ci-contre ?




**a** cos B ≈ 0,5

**b** cos B ≈ 0,58

**c** cos B ≈ 1,73

**d** cos B ≈ 2

## CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

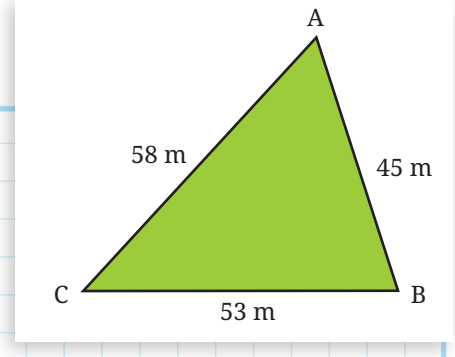
★**7.** Déterminez l'aire d'un triangle dont les côtés mesurent respectivement 12 cm, 18 cm et 24 cm.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$p = \frac{12+18+24}{2}$$
$$p = 27 \text{ cm}$$

$$A = \sqrt{27(27-12)(27-18)(27-24)}$$
$$A = \sqrt{27 \cdot 15 \cdot 9 \cdot 3}$$
$$A = \sqrt{10\,935}$$
$$A \approx 104{,}57 \text{ cm}^2$$

**RÉPONSE** L'aire du triangle est de 104,57 cm².

★★**8.** Combien mesure, au degré près, l'angle B dans le triangle ci-contre ?




**1** Aire du triangle

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$
$$p = \frac{53+58+45}{2}$$
$$p = 78 \text{ cm}$$

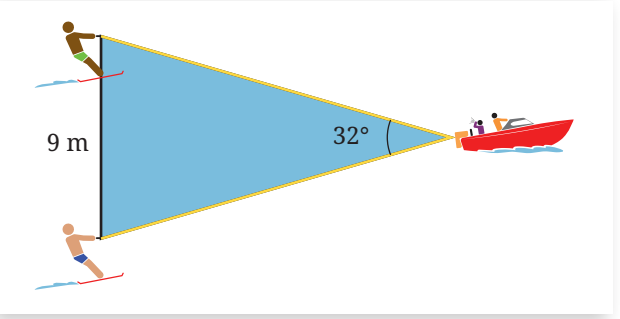
$$A = \sqrt{78(78-53)(78-58)(78-45)}$$
$$A = \sqrt{78 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 33}$$
$$A = \sqrt{1\,287\,000}$$
$$A \approx 1134{,}46 \text{ m}^2$$

**2** Mesure de l'angle B

$$A = \frac{ac \sin B}{2}$$
$$1134{,}46 \approx \frac{53 \cdot 45 \cdot \sin B}{2}$$
$$1134{,}46 \approx 1192{,}5 \cdot \sin B$$
$$0{,}951\,3 \approx \sin B$$
$$\sin^{-1}(0{,}951\,3) \approx \text{m}\angle B$$
$$72° \approx \text{m}\angle B$$

**RÉPONSE** L'angle B mesure 72°.

★★**9.** Des skieurs nautiques sont attachés derrière un bateau à l'aide de cordes de même longueur. Lors d'une manœuvre, l'angle formé par les deux cordes mesure 32° et la distance entre les deux skieurs est de 9 m. Calculez la longueur d'une des cordes.




**1** Mesure d'un des deux autres angles

$(180 - 32) \div 2 = 74°$

**2** Longueur d'une corde

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

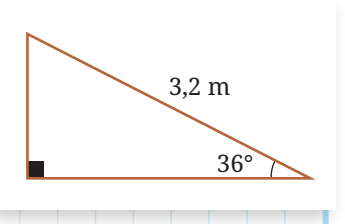
$$\frac{9}{\sin(32)} = \frac{\square}{\sin(74)}$$

$$b = \sin(74) \cdot \frac{9}{\sin(32)}$$

$$b \approx 16{,}33$$

**RÉPONSE** La longueur d'une des cordes est de 16,33 m.

★★**10.** On veut peindre le côté d'une rampe qui permet de faire des sauts en vélo de montagne. Déterminez la surface à peindre en vous référant au schéma ci-contre.




**1** Mesure de la hauteur du triangle

$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\sin(36) = \frac{\square}{3{,}2}$$

$$3{,}2 \cdot \sin(36) = x$$

$$1{,}88 \text{ m} \approx x$$

**2** Mesure de la base du triangle

$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos(36) = \frac{\square}{3{,}2}$$

$$3{,}2 \cdot \cos(36) = x$$

$$2{,}59 \text{ m} \approx x$$

**3** Aire du triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{2{,}59 \cdot 1{,}88}{2}$$

$$A \approx 2{,}43 \text{ m}^2$$

**RÉPONSE** La surface à peindre est de 2,43 m².

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★**11.** Deux voitures téléguidées partent en ligne droite d'un même point. L'angle entre elles mesure 35°. Une fois arrêtées, les deux voitures se trouvent à 201,2 m de distance. Sachant que la première voiture a franchi 152,8 m, calculez la distance parcourue par la seconde voiture.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**1** Mesure de l'angle C

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{201,2}{\sin(35)} = \frac{152,8}{\sin C}$$

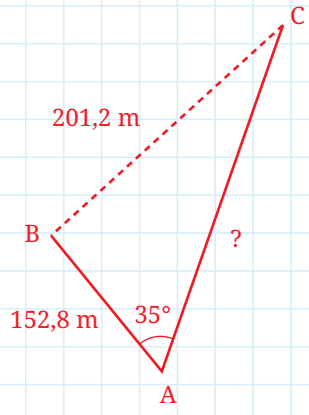
$$201,2 \cdot \sin C = 152,8 \cdot \sin(35)$$

$$\sin C = \frac{152,8 \cdot \sin(35)}{201,2}$$

$$\sin C \approx 0,435\,6$$

$$m\angle C \approx (0,435\,6)$$

$$m\angle C \approx 25,823\,5°$$




**2** Mesure de l'angle B

$$180 - (35 + 25,823\,5) \approx 119,176\,5°$$

**3** Mesure du segment AC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

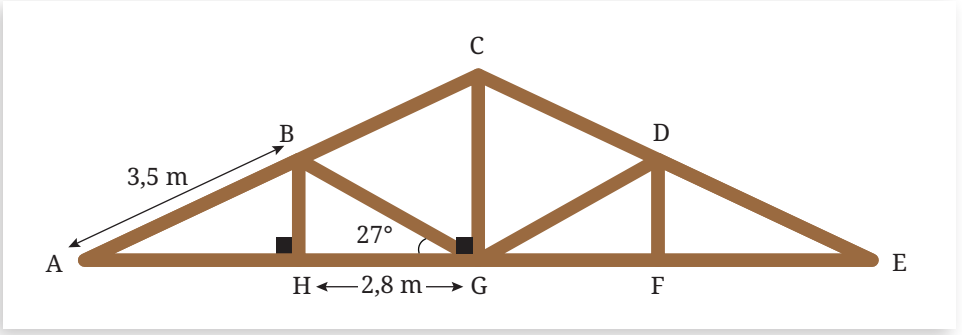
$$\frac{201,2}{\sin(35)} = \frac{\square}{\sin(119,176\,5)}$$

$$\frac{201,2 \cdot \sin(119,176\,5)}{2} = x$$

$$306,28 \approx x$$

**RÉPONSE** La seconde voiture a parcouru une distance de 306,28 m.

★★ **12.** Soit le plan suivant, qui représente une ferme de toit. Déterminez la hauteur CG du toit.




**1** Mesure du segment BH

$\tan G = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(27) = \dfrac{\square}{2{,}8}$

$2{,}8 \bullet \tan(27) = x$

$1{,}426\,7 \approx x$

**2** m∠A

$\sin A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

$\sin A = \dfrac{1{,}426\,7}{3{,}5}$

$\sin A \approx 0{,}407\,6$

$\text{m}\angle A \approx \sin^{-1}(0{,}407\,6)$

$\text{m}\angle A \approx 24{,}054\,2°$

**3** Mesure du segment AH

$\cos A = \dfrac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

$\cos(24{,}054\,2) = \dfrac{\square}{3{,}5}$

$3{,}5 \bullet \cos(24{,}054\,2) \approx x$

$3{,}196\,1 \approx x$

**4** Déterminer la mesure du segment AG

$3{,}196\,1 + 2{,}8 \approx 5{,}996\,1$

**5** Mesure du segment CG

$\tan A = \dfrac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(24{,}054\,2) = \dfrac{\square}{5{,}996\,1}$

$5{,}996\,1 \bullet \tan(24{,}054\,2) \approx x$

$2{,}68 \approx x$

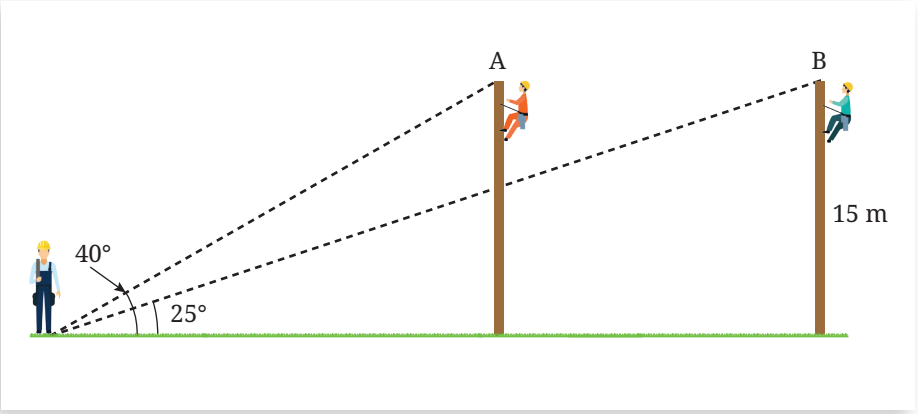
**RÉPONSE** La mesure de la hauteur CG est d'environ 2,68 m.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**13.** Des monteurs de lignes électriques travaillent au sommet de deux poteaux distincts ayant la même hauteur. Le contremaître se trouve au sol pour leur donner ses directives. Quelle distance sépare les deux poteaux ?




**1** Distance du monteur A

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(40) = \frac{15}{x}$$

$$x \cdot \tan(40) = 15$$

$$x = \frac{15}{\tan(40)}$$

$$x \approx 17{,}876\,3$$

**2** Distance du monteur B

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(25) = \frac{15}{x}$$

$$x \cdot \tan(25) = 15$$

$$x = \frac{15}{\tan(25)}$$

$$x \approx 32{,}167\,6$$

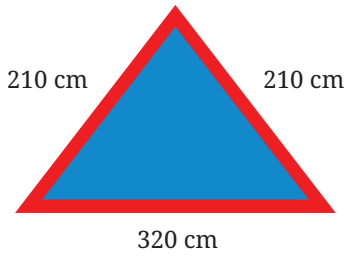
**3** Distance entre les deux monteurs

$32{,}167\,6 - 17{,}876\,3 \approx 14{,}29$

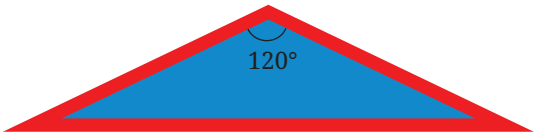
**RÉPONSE** La distance qui sépare les deux poteaux est de 14,29 m.

**14.** Une usine de fabrication de deltaplanes utilise des toiles triangulaires pour faire voler ses appareils. Le propriétaire de l'usine désire changer la forme des toiles en utilisant la même quantité de tissu. Voici les deux modèles en question.

**Ancien modèle**




**Nouveau modèle**




Déterminez la longueur de la bordure nécessaire pour confectionner le nouveau modèle de toile.

**1** Aire de la toile de l'ancien modèle

$p = \frac{a+b+c}{2}$

$p = \frac{210+210+320}{2}$

$p = 370$

$A = \sqrt{370(370-210)(370-210)(370-320)}$

$A = \sqrt{370 \cdot 160 \cdot 160 \cdot 50}$

$A = \sqrt{473\ 600\ 000}$

$A \approx 21\ 762{,}35\ \text{cm}^2$

**2** Mesure d'un des côtés isocèles du nouveau modèle

$A = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$

$21\ 762{,}35 \approx \frac{\square \cdot \square \cdot \sin(120)}{2}$

$21\ 762{,}35 \approx \frac{\square^2 \cdot \sin(120)}{2}$

$21\ 762{,}35 \approx 0{,}433\ x^2$

$50\ 259{,}468\ 8 \approx x^2$

$224{,}186\ 2 \approx x$

**3** Mesure d'un des angles isocèles du nouveau modèle

$(180-120) \div 2 = 30°$

**4** Mesure de l'autre côté du nouveau modèle

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{\square}{\sin(120)} = \frac{224{,}186\ 2}{\sin(30)}$

$a = \frac{224{,}186\ 2 \cdot \sin(120)}{\sin(30)}$

$a \approx 388{,}301\ 9$

**5** Longueur totale de la nouvelle bordure

$224{,}186\ 2 \cdot 2 + 388{,}301\ 9 \approx 836{,}67$

**RÉPONSE** La longueur de la bordure nécessaire pour confectionner le nouveau modèle de toile est de 836,67 cm.

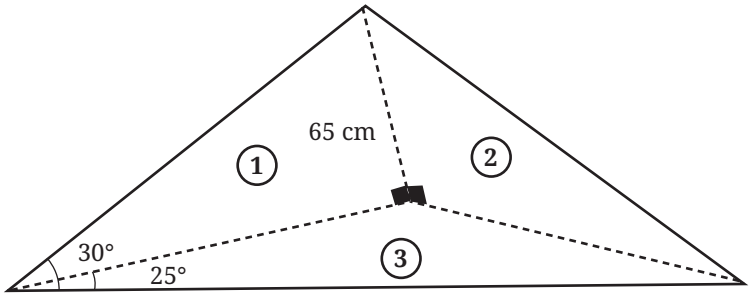
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## Le toit de la maisonnette

Lucie a brisé le toit en bois de sa maisonnette pour poupées. Son père veut lui en reconstruire un identique à l'original. Le toit de la maisonnette a la forme d'une pyramide à base triangulaire, comme le montre le schéma ci-dessous, où les figures 1 et 2 sont des triangles rectangles isométriques.
Quelle quantité de bois le père de Lucie devra-t-il prévoir pour son projet de reconstruction ?




**1** Mesure de l'autre côté des triangles 1 et 2

$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$

$\tan(30) = \frac{65}{\square}$

$x = \frac{65}{\tan(30)}$

$x \approx 112{,}583\ 3$ m

**2** Aire des triangles 1 et 2

$A = \frac{b \cdot h}{2} \cdot 2$

$A = 112{,}583\ 3 \cdot 65$

$A \approx 7317{,}914\ 5$ cm$^2$

**3** Mesure de l'angle obtus du triangle 3

$180 - (25 + 25) = 130°$

**4** Aire du triangle 3

$A = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$

$A = \frac{112{,}583\ 3 \cdot 112{,}583\ 3 \cdot \sin(130)}{2}$

$A \approx 4854{,}806\ 4$ cm$^2$

**5** Aire totale

$7317{,}914\ 5 + 4854{,}806\ 4 \approx 12\ 172{,}72$ cm$^2$

**RÉPONSE** Le père de Lucie devra prévoir une quantité de bois de 12 172,72 cm$^2$.

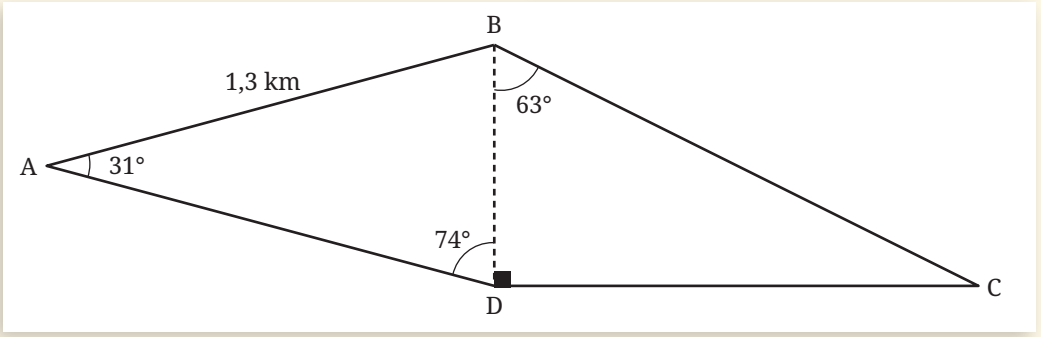
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# SITUATION-PROBLÈME

CD1

## Une terre en héritage

À la suite du décès de leur père, Sylvie et Louise reçoivent en héritage une partie de la terre familiale. La terre à la forme d'un quadrilatère, comme l'indique le schéma ci-dessous.




Le segment BD représente la séparation du terrain. Louise a hérité de la partie gauche du terrain et Sylvie de la partie droite. Laquelle des deux sœurs a reçu la plus grande partie de la terre ?

**1** Mesure du segment BD

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{\square}{\sin(31)} = \frac{1{,}3}{\sin(74)}$$

$$a = \frac{1{,}3 \cdot \sin(31)}{\sin(74)}$$

$$a \approx 0{,}693\ 7 \text{ km}$$

**2** Mesure de l'angle ABD

$180 - (31 + 74) = 75°$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**3** Aire de la partie de Louise

$$A = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$A = \frac{1{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \sin(75)}{2}$$

$$A \approx 0{,}439\ 5\ \text{km}^2$$

**4** Mesure du segment DC

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan(63) = \frac{\square}{0{,}693\ 7}$$

$$0{,}693\ 7 \cdot \tan(63) = x$$

$$1{,}361\ 5\ \text{km} \approx x$$

**5** Aire de la partie de Sylvie

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{1{,}361\ 5 \cdot 0{,}693\ 7}{2}$$

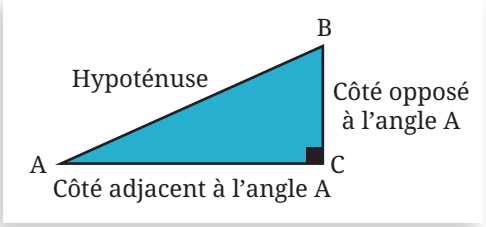
$$A \approx 0{,}47\ \text{km}^2$$

**RÉPONSE** C'est Sylvie qui a reçu la plus grande partie de la terre familiale.

# FEUILLE DE NOTES

## Rapports trigonométriques

Ils s'appliquent uniquement aux triangles rectangles.




**NOTATION**

$$\sin A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

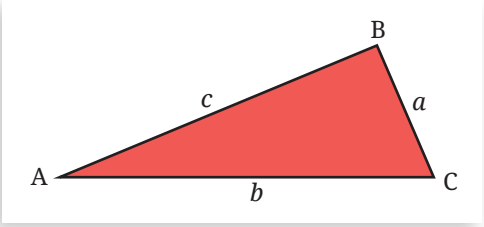
$$\cos A = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

Pour trouver la mesure d'un angle, on utilise les touches $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ ou $\tan^{-1}$ de la calculatrice.

## Loi des sinus

Elle s'applique aux triangles quelconques.




$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Pour trouver la mesure d'un angle obtus, on doit :

- calculer la mesure de l'angle à l'aide de la loi des sinus ;
- calculer l'angle supplémentaire à l'angle obtenu.

## Résolution d'un triangle

On détermine la mesure des trois angles et des trois côtés du triangle.

## Aire d'un triangle

$$A = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$$

On emploie cette formule si on connaît la mesure d'un angle compris entre deux côtés adjacents.

## Aire d'un triangle

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

On emploie cette formule si on connaît la mesure de la base et de la hauteur.

## Aire d'un triangle

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où $p$ est le demi-périmètre du triangle.

On emploie cette formule si on connaît la mesure des trois côtés du triangle.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Chapitre

7

# LES STATISTIQUES

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée


| | | |
|---|---|---|
| **Réactivation des connaissances** | | 328 |
| **7.1** | Les diagrammes à tige et à feuilles | 334 |
| **7.2** | L'écart moyen | 339 |
| **7.3** | Le rang centile | 343 |
| **7.4** | Les tableaux à double entrée, la corrélation et les nuages de points | 350 |
| **7.5** | Les droites de régression | 369 |
| **Consolidation du chapitre 7** | | 384 |
| **Situation d'application – Le banquet de Noël** | | 394 |
| **Situation-problème – Le Grand Vert** | | 396 |
| **Feuille de notes** | | 398 |

## À QUOI ÇA SERT ?

Les statistiques sont omniprésentes dans notre vie. Sans que nous le sachions, énormément d'éléments de notre quotidien sont basés sur les statistiques. Tous les médicaments qui sont sur le marché ont dû passer des tests statistiques, tous les objets de consommation que nous achetons ont fait l'objet d'études statistiques, même les aliments que nous mangeons ont été approuvés par des agences gouvernementales qui s'appuient sur des données statistiques avant d'autoriser leur vente. Les prévisions météo n'y échappent pas non plus, ce qui est aussi la preuve que les statistiques servent à faire des prévisions… qui peuvent parfois être fausses !

# RÉACTIVATION DES CONNAISSANCES

★**1.** Calculez la moyenne des distributions suivantes.

**a** 0, 0, 1, 4, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10

$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{0 + 0 + 1 + 4 + 6 + 6 + 6 + 7 + 8 + 8 + 8 + 9 + 10 + 10}{14}$$

$$\bar{x} = \frac{83}{14}$$

$$\bar{x} \approx 5{,}93$$

**RÉPONSE** La moyenne est de 5,93.

**b** 24, $^{-}4$, 18, $^{-}12$, 0, 18, $^{-}3$, 20, $^{-}9$, 5, $^{-}11$, 2

$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{24 + {}^{-}4 + 18 + {}^{-}12 + 0 + 18 + {}^{-}3 + 20 + {}^{-}9 + 5 + {}^{-}11 + 2}{12}$$

$$\bar{x} = \frac{48}{12}$$

$$\bar{x} = 4$$

**RÉPONSE** La moyenne est de 4.

**c**

| ÂGE DES ÉLÈVES DANS LE COURS DE MATHÉMATIQUE | |
|---|---|
| **ÂGE** | **NOMBRE D'ÉLÈVES** |
| 15 | 6 |
| 16 | 20 |
| 17 | 7 |
| 18 | 2 |

$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{(15 \cdot 6) + (16 \cdot 20) + (17 \cdot 7) + (18 \cdot 2)}{6 + 20 + 7 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{90 + 320 + 119 + 36}{35}$$

$$\bar{x} = \frac{565}{35}$$

$$\bar{x} \approx 16{,}14$$

**RÉPONSE** La moyenne d'âge des élèves est de 16,14 ans.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée



**d**

| NOMBRE DE VÊTEMENTS QUE POSSÈDENT LES MEMBRES DU PERSONNEL D'UNE COMPAGNIE | |
|---|---|
| **NOMBRE DE VÊTEMENTS** | **NOMBRE DE PERSONNES** |
| [0, 20[ | 11 |
| [20, 40[ | 24 |
| [40, 60[ | 43 |
| [60, 80[ | 76 |
| [80, 100[ | 61 |

$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{(10 \cdot 11) + (30 \cdot 24) + (50 \cdot 43) + (70 \cdot 76) + (90 \cdot 61)}{11 + 24 + 43 + 76 + 61}$$

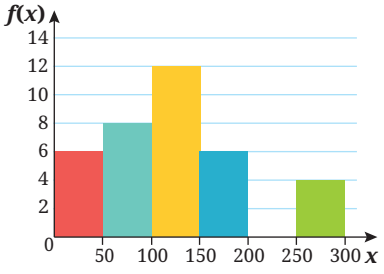
$$\bar{x} = \frac{110 + 720 + 2150 + 5320 + 5490}{215}$$

$$\bar{x} = \frac{13\,790}{215}$$

$$\bar{x} \approx 64{,}14$$

**RÉPONSE** La moyenne de vêtements par personne est de 64,14.

**e**




$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{(25 \cdot 6) + (75 \cdot 8) + (125 \cdot 12) + (175 \cdot 6) + (225 \cdot 0) + (275 \cdot 4)}{6 + 8 + 12 + 6 + 0 + 4}$$

$$\bar{x} = \frac{150 + 600 + 1500 + 1050 + 0 + 1100}{36}$$

$$\bar{x} = \frac{4400}{36}$$

$$\bar{x} = 122{,}\overline{2}$$

**RÉPONSE** La moyenne est de $122{,}\overline{2}$.

**f**

| PRIX DES DERNIÈRES VOITURES VENDUES PAR DANY | |
|---|---|
| **PRIX DES VOITURES ($)** | **PROPORTION DE VOITURES (%)** |
| 18 714 | 15 |
| 21 134 | 40 |
| 28 734 | 30 |
| 30 304 | 10 |
| 63 679 | 5 |

**1** $18\,714 \cdot \frac{15}{100} = 2807{,}10$

$21\,134 \cdot \frac{40}{100} = 8453{,}60$

$28\,734 \cdot \frac{30}{100} = 8620{,}20$

$30\,304 \cdot \frac{10}{100} = 3030{,}40$

$63\,679 \cdot \frac{5}{100} = 3183{,}95$

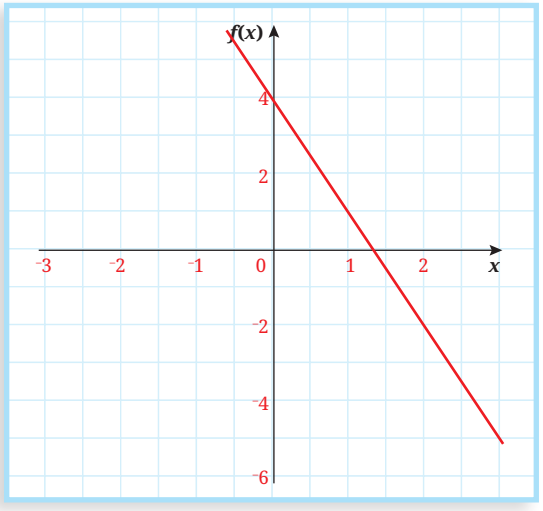
**2** $\bar{x} = 2807{,}10 + 8453{,}60 + 8620{,}20 + 3030{,}40 + 3183{,}95$

$\bar{x} = 26\,095{,}25$

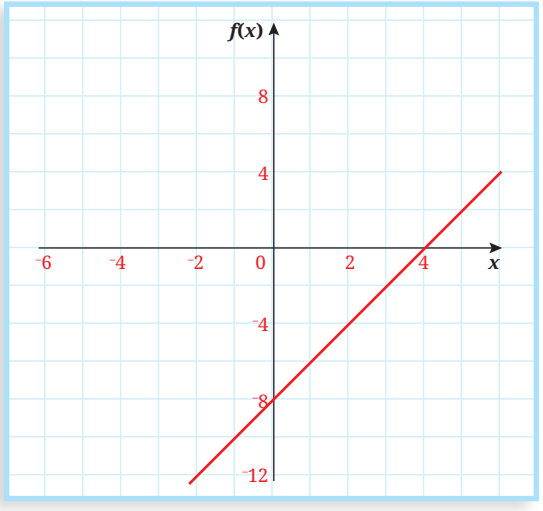
**RÉPONSE** La moyenne du prix des voitures vendues par Dany est de 26 095,25 $.

★**2.** Représentez chaque fonction dans un plan cartésien.

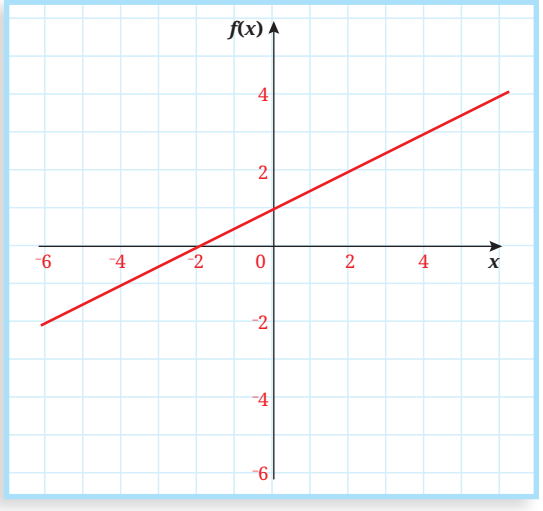
**a** $f(x) = -3x + 4$



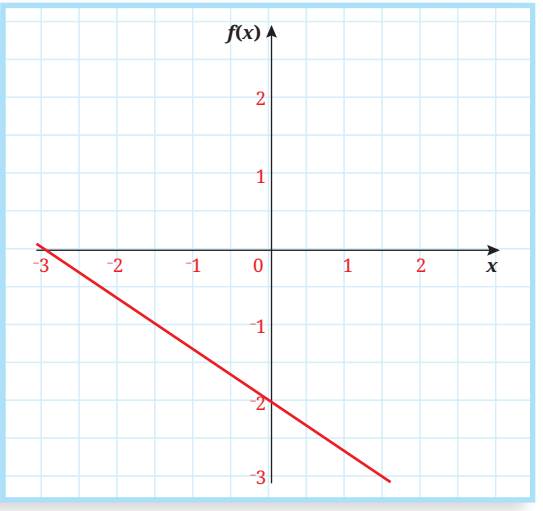

**b** $f(x) = 2x - 8$



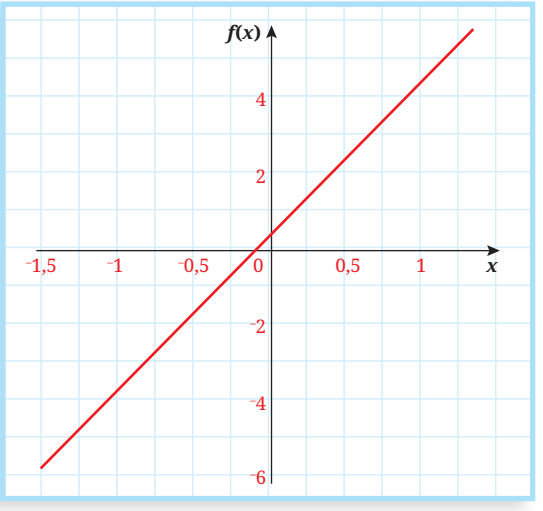

**c** $f(x) = \frac{x}{2} + 1$



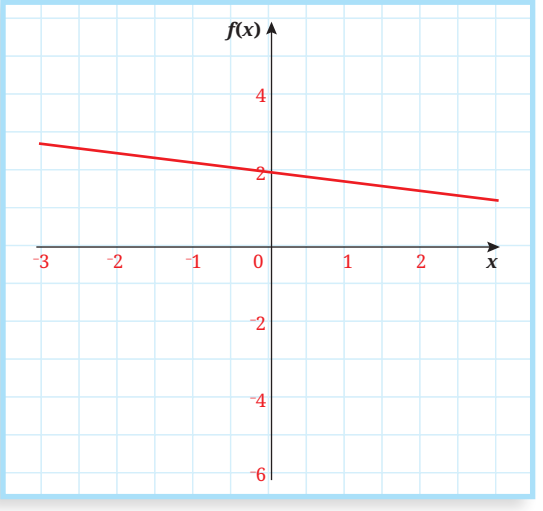

**d** $f(x) = \frac{-2}{3}x - 2$




**e** $f(x) = 4x + \frac{1}{2}$




**f** $f(x) = \frac{-x}{4} + 2$




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★3. Écrivez la règle des fonctions affines passant par les points suivants.

**a** (8, 16) et (14, 19)

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{19 - 16}{14 - 8}$

$a = \frac{3}{6}$

$a = \frac{1}{2}$

**2** $f(x) = \frac{\square}{2} + b$

$16 = \frac{8}{2} + b$

$16 = 4 + b$

$12 = b$

**RÉPONSE** $f(x) = \frac{\square}{2} + 12$

**b** (12, 3) et ($^-16$, $^-18$)

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{^-18 - 3}{^-16 - 12}$

$a = \frac{^-21}{^-28}$

$a = \frac{3}{4}$

**2** $f(x) = \frac{3\square}{4} + b$

$3 = \frac{3(12)}{4} + b$

$3 = 9 + b$

$^-6 = b$

**RÉPONSE** $f(x) = \frac{3\square}{4} - 6$

**c** ($^-3$, 42) et (2, 12)

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{12 - 42}{2 - {}^-3}$

$a = \frac{^-30}{5}$

$a = {}^-6$

**2** $f(x) = {}^-6x + b$

$42 = {}^-6({}^-3) + b$

$42 = 18 + b$

$24 = b$

**RÉPONSE** $f(x) = {}^-6x + 24$

**d** (2, $^-10$) et (23, $^-31$)

**1** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{^-31 - {}^-10}{23 - 2}$

$a = \frac{^-21}{21}$

$a = {}^-1$

**2** $f(x) = {}^-x + b$

$^-10 = {}^-(2) + b$

$^-8 = b$

**RÉPONSE** $f(x) = {}^-x - 8$

★**4.** Représentez les distributions ci-dessous à l'aide d'un tableau à données condensées et d'un histogramme.

**a** 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 12, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 29, 30, 31, 31, 32, 42

**1** Amplitude des classes

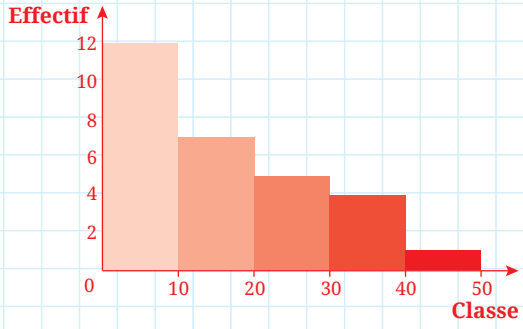
Étendue : $42 - 2 = 40$

Amplitude $= \frac{40}{5} = 8$, arrondi à 10

**2** Tableau à données condensées

| Classe | Effectif |
|---|---|
| [0, 10[ | 12 |
| [10, 20[ | 7 |
| [20, 30[ | 5 |
| [30, 40[ | 4 |
| [40, 50[ | 1 |

**3** Histogramme




**b** 32, 43, 47, 54, 81, 99, 100, 110, 120, 150, 182, 193, 194, 300, 311, 354, 372, 400, 431, 433

**1** Amplitude des classes

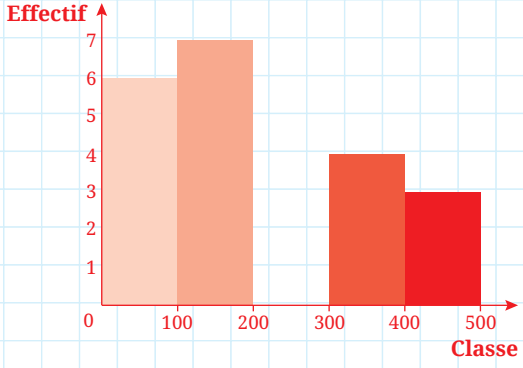
Étendue : $433 - 32 = 401$

Amplitude $= \frac{401}{5} = 80{,}2$, arrondi à 100

**2** Tableau à données condensées

| Classe | Effectif |
|---|---|
| [0, 100[ | 6 |
| [100, 200[ | 7 |
| [200, 300[ | 0 |
| [300, 400[ | 4 |
| [400, 500[ | 3 |

**3** Histogramme




© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**5.** Calculez, si possible, l'étendue, la moyenne, le mode et la médiane de chaque distribution.

**a** 1, 2, 4, 4, 5, 6, 8, 12, 12, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 29, 30, 31, 31, 32, 42

**1** Étendue : $42 - 1 = 41$

**2** Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 4 + 4 + 5 + 6 + 8 + 12 + 12 + 18 + 19 + 20 + 22 + 24 + 25 + 29 + 30 + 31 + 31 + 32 + 42}{21}$$

$$\bar{x} = \frac{377}{21}$$

$$\bar{x} \approx 17{,}95$$

**3** Mode : 4, 12 et 31

**4** Médiane : 19 (Il y a 21 données, donc la 11e est la médiane.)

**RÉPONSE** L'étendue est 41 ; la moyenne est 17,95 ; les modes sont 4, 12 et 31 ; la médiane est 19.

**b**

| CLASSE | [0, 50[ | [50, 100[ | [100, 150[ | [150, 200[ |
|---|---|---|---|---|
| EFFECTIF | 21 | 34 | 33 | 8 |

**1** Étendue : indéterminée

**2** Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$$\bar{x} = \frac{(25 \cdot 21) + (75 \cdot 34) + (125 \cdot 33) + (175 \cdot 8)}{21 + 34 + 33 + 8}$$

$$\bar{x} = \frac{525 + 2550 + 4125 + 1400}{96}$$

$$\bar{x} = \frac{8600}{96}$$

$$\bar{x} \approx 89{,}58$$

**3** Classe modale : [50, 100[

**4** Médiane : 75 (Il y a 96 données, donc la moyenne se situe entre la 48e et la 49e donnée.)

**RÉPONSE** L'étendue est indéterminée ; la moyenne est 89,58 ; la classe modale est [50, 100[ ; la médiane est 75.

# 7.1 LES DIAGRAMMES À TIGE ET À FEUILLES

## Représenter une distribution à l'aide d'un diagramme à tige et à feuilles

En statistique, une **distribution à un caractère** correspond aux résultats d'une étude portant sur un caractère.

**EXEMPLE 1**

**On mesure la grandeur de l'ensemble des élèves d'une école.**

**EXEMPLE 2**

**On calcule le poids de l'ensemble des élèves d'une école.**

Toutefois, si on effectuait une étude portant sur la grandeur **et** le poids de l'ensemble des élèves, ce ne serait plus une distribution à un caractère puisqu'on réaliserait une étude sur deux caractères.

Par le passé, vous avez vu différentes façons de représenter une distribution à un caractère (histogramme, diagramme de quartiles, diagramme à bandes, etc.). Le **diagramme à tige et à feuilles** en est une autre. Il s'agit d'un diagramme comportant une bande centrale appelée « tige » ainsi que des données appelées « feuilles » situées d'un côté ou de l'autre de la tige.

L'utilité première de ce mode de représentation est de faciliter la comparaison de deux distributions en les représentant toutes deux dans un même diagramme.

**EXEMPLE 1**

**Soit une seule distribution : 71, 101, 67, 83, 85, 105, 76, 68, 62.**

**1.** Mettre les données en ordre croissant.

62, 67, 68, 71, 76, 83, 85, 101, 105

**2.** Placer les dizaines de chaque donnée dans une colonne appelée « tige ».

* Il est important de faire des bonds constants.

62, 67, 68, 71, 76, 83, 85, 101, 105

| tige |
|---|
| 6 |
| 7 |
| 8 |
| 9 |
| 10 |

**3.** Placer les unités de chaque donnée à côté de la dizaine correspondante.

| tige | feuilles |
|---|---|
| 6 | 2, 7, 8 |
| 7 | 1, 6 |
| 8 | 3, 5 |
| 9 | |
| 10 | 1, 5 |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**EXEMPLE 2**

**Soit deux distributions portant sur la masse, en grammes, des mâles et des femelles du cardinal rouge.**

**Femelles :** 21, 26, 27, 28, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 41, 42, 42, 42, 43
**Mâles :** 29, 29, 30, 30, 32, 34, 34, 36, 37, 37, 39, 41, 43, 43, 43, 44, 46, 47, 47, 48

Suivre les mêmes étapes qu'avec une distribution, mais mettre les deux distributions de chaque côté de la tige.

**Masse (en grammes) du cardinal rouge**

| Femelles | | Mâles |
|---|---|---|
| 8, 7, 6, 1 | 2 | 9, 9 |
| 8, 7, 6, 5, 4, 1 | 3 | 0, 0, 2, 4, 4, 6, 7, 7, 9 |
| 3, 2, 2, 2, 1, 1 | 4 | 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 7, 8 |

## EXERCICES

★ **1.** Calculez l'étendue, la moyenne, la médiane et le mode de la distribution ci-contre.

| | |
|---|---|
| 20 | 1, 7, 7, 8, 8, 9 |
| 21 | 2, 4, 5, 5, 5, 9 |
| 22 | 2, 2, 2, 5, 6, 6, 9 |
| 23 | 4, 4, 5, 5, 6, 6, 8 |
| 24 | 0, 6, 6, 8, 9 |
| 25 | 0, 0, 1 |

**1** Étendue : $251 - 201 = 50$

**2** Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$$\bar{x} = \frac{201+207+207+208+208+209+212+214+215+215+215+219+222+222+222+225+226+226+229+234+234+235+235+236+236+238+240+246+246+248+249+250+250+251}{34}$$

$$\bar{x} = \frac{7730}{34}$$

$$\bar{x} \approx 227{,}35$$

**3** Médiane : 226 (Il y a 34 données, donc la médiane se situe entre la 17e et la 18e donnée.)

**4** Mode : 215 et 222

**RÉPONSE** L'étendue est 50 ; la moyenne est 227,35 ; la médiane est 226 ; les modes sont 215 et 222.

★**2.** Représentez chaque situation à l'aide d'un diagramme à tige et à feuilles.

**a** L'envergure, en centimètres, des ailes de deux espèces d'oiseaux

**Aigle royal : 231, 214, 227, 220, 193, 192, 185, 194, 186, 234, 180, 183, 185, 200, 210, 221**

**Vautour fauve : 265, 240, 238, 265, 270, 235, 239, 267, 268, 256, 254, 245, 250**

**1** Ordre croissant

**Aigle royal :** 180, 183, 185, 185, 186, 192, 193, 194, 200, 210, 214, 220, 221, 227, 231, 234

**Vautour fauve :** 235, 238, 239, 240, 245, 250, 254, 256, 265, 265, 267, 268, 270

**2** **Envergure des ailes des oiseaux (en centimètre)**

| Aigle royal | | Vautour fauve |
|---|---|---|
| 6, 5, 5, 3, 0 | 18 | |
| 4, 3, 2 | 19 | |
| 0 | 20 | |
| 4, 0 | 21 | |
| 7, 1, 0 | 22 | |
| 4, 1 | 23 | 5, 8, 9 |
| | 24 | 0, 5 |
| | 25 | 0, 4, 6 |
| | 26 | 5, 5, 7, 8 |
| | 27 | 0 |

**b** Les résultats en mathématiques des élèves de deux groupes différents

**Groupe 401**
**76, 64, 56, 32, 75, 78, 82, 63, 61, 92, 47, 64, 71, 53, 94, 85, 87, 78, 79, 72, 71, 64, 65, 60, 52, 54, 74, 83, 89, 70, 71, 74, 75, 78**

**Groupe 402**
**62, 45, 32, 30, 67, 87, 99, 82, 98, 43, 37, 51, 50, 68, 83, 93, 91, 65, 58, 60, 93, 43, 42, 88, 89, 55, 55, 95, 93, 73, 77, 78**

**1** Ordre croissant

**Groupe 401 :** 32, 47, 52, 53, 54, 56, 60, 61, 63, 64, 64, 64, 65, 70, 71, 71, 71, 72, 74, 74, 75, 75, 76, 78, 78, 78, 79, 82, 83, 85, 87, 89, 92, 94

**Groupe 402 :** 30, 32, 37, 42, 43, 43, 45, 50, 51, 55, 55, 58, 60, 62, 65, 67, 68, 73, 77, 78, 82, 83, 87, 88, 89, 91, 93, 93, 93, 95, 98, 99

**2** **Résultats en mathématiques (en pourcentage)**

| Groupe 401 | | Groupe 402 |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 0, 2, 7 |
| 7 | 4 | 2, 3, 3, 5 |
| 6, 4, 3, 2 | 5 | 0, 1, 5, 5, 8 |
| 5, 4, 4, 4, 3, 1, 0 | 6 | 0, 2, 5, 7, 8 |
| 9, 8, 8, 8, 6, 5, 5, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 0 | 7 | 3, 7, 8 |
| 9, 7, 5, 3, 2 | 8 | 2, 3, 7, 8, 9 |
| 4, 2 | 9 | 1, 3, 3, 3, 5, 8, 9 |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**3.** Représentez les distributions suivantes à l'aide d'un diagramme à tige et à feuilles.

**a** L'âge des usagers et usagères du transport en commun

5, 7, 13, 14, 15, 17, 17, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 31, 36, 42, 43, 60, 65

**1** Les données sont déjà en ordre croissant.

**2** **Âge des usagers du transport en commun**

| | |
|---|---|
| 0 | 5, 7 |
| 1 | 3, 4, 5, 7, 7, 7, 8 |
| 2 | 0, 2, 4, 6 |
| 3 | 1, 6 |
| 4 | 2, 3 |
| 5 | |
| 6 | 0, 5 |

**b** La longueur, en centimètres, de différentes poutres de bois

213, 176, 206, 154, 143, 139, 142, 157, 164, 183, 195, 175, 200, 196, 157, 143

**1** Ordre croissant
139, 142, 143, 143, 154, 157, 157, 164, 175, 176, 183, 195, 196, 200, 206, 213

**2** **Longueur des poutres de bois (en centimètres)**

| | |
|---|---|
| 13 | 9 |
| 14 | 2, 3, 3 |
| 15 | 4, 7, 7 |
| 16 | 4 |
| 17 | 5, 6 |

| | |
|---|---|
| 18 | 3 |
| 19 | 5, 6 |
| 20 | 0, 6 |
| 21 | 3 |

**c** Le nombre d'heures que les jeunes passent devant un écran par semaine

85, 32, 56, 26, 31, 24, 18, 105, 24, 28, 31, 30, 20, 52, 47, 61, 17, 5, 22, 32, 41, 36, 31, 30, 40, 28

**1** Ordre croissant
5, 17, 18, 20, 22, 24, 24, 26, 28, 28, 30, 30, 31, 31, 31, 32, 32, 36, 40, 41, 47, 52, 56, 61, 85, 105

**2** **Temps passé devant un écran par des jeunes (en heures)**

| | |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 7, 8 |
| 2 | 0, 2, 4, 4, 6, 8, 8 |
| 3 | 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 6 |
| 4 | 0, 1, 7 |
| 5 | 2, 6 |

| | |
|---|---|
| 6 | 1 |
| 7 | |
| 8 | 5 |
| 9 | |
| 10 | 5 |

**d** Le salaire horaire des membres du personnel d'une compagnie

15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 17, 17, 18, 18, 20, 20, 20, 22, 26, 40, 40, 40, 42, 42, 42, 51

**1** Les données sont déjà en ordre croissant.

**2** **Salaire horaire des membres du personnel d'une compagnie (en dollars)**

| | |
|---|---|
| 1 | 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 8, 8 |
| 2 | 0, 0, 0, 2, 6 |
| 3 | |
| 4 | 0, 0, 0, 2, 2, 2 |
| 5 | 1 |

★★**4.** Le diagramme à tige et à feuilles représente l'âge des personnes, selon leur sexe, inscrites à un cours de natation.

**Âge des participants à un cours de natation**

| Femmes | | Hommes |
|---|---|---|
| 9, 8, 8, 7, 7 | 0 | 5, 6, 6 |
| 2, 2, 1, 1, 1, 0 | 1 | 0, 0, 1, 1, 7, 7 |
| 2, 1 | 2 | 2, 3, 4, 6 |
| | 3 | 0, 1, 1, 2, 2 |
| 2, 2 | 4 | 1 |

**a** En vous basant uniquement sur l'allure du diagramme, dans quel groupe (celui des femmes ou celui des hommes) les personnes sont-elles les plus jeunes ?

*Réponse personnelle. Exemple :* Selon moi, le groupe des femmes est celui où les personnes sont les plus jeunes puisqu'il y a plus de données dans le haut du diagramme.

**b** En vous basant sur la moyenne et la médiane, confirmez ou infirmez votre réponse précédente.

**1** Moyenne des femmes : $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 11 + 11 + 11 + 12 + 12 + 21 + 22 + 42 + 42}{15}$

$\bar{x} = \dfrac{233}{15}$

$\bar{x} = 15{,}5\overline{3}$ ans

**2** Médiane des femmes : 11 ans (Il y a 15 données, donc la médiane est la 8e donnée.)

**3** Moyenne des hommes : $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{5 + 6 + 6 + 10 + 10 + 11 + 11 + 17 + 17 + 22 + 23 + 24 + 26 + 30 + 31 + 31 + 32 + 32 + 41}{19}$

$\bar{x} = \dfrac{385}{19}$

$\bar{x} \approx 20{,}26$ ans

**4** Médiane des hommes : 22 ans (Il y a 19 données, donc la médiane est la 10e donnée.)

**RÉPONSE** La moyenne d'âge est plus basse chez les femmes que chez les hommes, tout comme l'est la médiane. Ainsi, je confirme ma réponse en **a)**.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# 7.2 L'ÉCART MOYEN

## Calculer l'écart moyen

Tout comme l'étendue ou l'étendue interquartile, l'**écart moyen** est une mesure de dispersion. Plus l'écart moyen est petit, plus les données d'une distribution sont rapprochées les unes des autres, et plus il est grand, plus les données sont éloignées les unes des autres.

L'écart moyen consiste à calculer la moyenne de l'écart de chaque donnée avec la moyenne de la distribution. Pour ce faire, on utilise la formule suivante.

$$\textbf{Écart moyen} = \frac{\textbf{Somme des écarts à la moyenne}}{\textbf{Nombre de données}}$$

**EXEMPLE**

**Calculer l'écart moyen de la distribution suivante.**

**7, 7, 8, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 19, 21**

| | |
|---|---|
| **1.** Calculer la moyenne de la distribution. | $\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$<br>$\bar{x} = \frac{7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10 + 12 + 15 + 16 + 19 + 21}{11}$<br>$\bar{x} = \frac{132}{11}$<br>$\bar{x} = 12$ |
| **2.** Calculer l'écart entre chaque donnée et la moyenne.<br>* Il est à noter que la valeur d'un écart est toujours positive. | $12 - 7 = 5$<br>$12 - 7 = 5$<br>$12 - 8 = 4$<br>$12 - 8 = 4$<br>$12 - 9 = 3$<br>$12 - 10 = 2$<br>$12 - 12 = 0$<br>$15 - 12 = 3$<br>$16 - 12 = 4$<br>$19 - 12 = 7$<br>$21 - 12 = 9$ |
| **3.** Calculer la somme de tous les écarts obtenus à l'étape 2. | Somme des écarts à la moyenne<br>$= 5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 0 + 3 + 4 + 7 + 9$<br>Somme des écarts à la moyenne = 46 |
| **4.** Diviser la somme des écarts à la moyenne par le nombre de données. | $\text{Écart moyen} = \frac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$<br>$\text{Écart moyen} = \frac{46}{11}$<br>$\text{Écart moyen} = 4,\overline{18}$ |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** Calculez l'écart moyen de chacune des distributions suivantes.

**a** 7, 7, 7, 8, 8, 8

**1** $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 8}{6}$

$\bar{x} = \dfrac{45}{6}$

$\bar{x} = 7{,}5$

**2** $7{,}5 - 7 = 0{,}5$ $\quad$ $8 - 7{,}5 = 0{,}5$

$7{,}5 - 7 = 0{,}5$ $\quad$ $8 - 7{,}5 = 0{,}5$

$7{,}5 - 7 = 0{,}5$ $\quad$ $8 - 7{,}5 = 0{,}5$

**3** $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 3$

**4** $\text{Écart moyen} = \dfrac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$

$\text{Écart moyen} = \dfrac{3}{6}$

$\text{Écart moyen} = 0{,}5$

**RÉPONSE** L'écart moyen est de 0,5.

**b** 215, 245, 276, 300, 310

**1** $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{215 + 245 + 276 + 300 + 310}{5}$

$\bar{x} = \dfrac{1346}{5}$

$\bar{x} = 269{,}2$

**2** $269{,}2 - 215 = 54{,}2$ $\quad$ $300 - 269{,}2 = 30{,}8$

$269{,}2 - 245 = 24{,}2$ $\quad$ $310 - 269{,}2 = 40{,}8$

$276 - 269{,}2 = 6{,}8$

**3** $54{,}2 + 24{,}2 + 6{,}8 + 30{,}8 + 40{,}8 = 156{,}8$

**4** $\text{Écart moyen} = \dfrac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$

$\text{Écart moyen} = \dfrac{156{,}8}{5}$

$\text{Écart moyen} = 31{,}36$

**RÉPONSE** L'écart moyen est de 31,36.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**C** 55, 62, 75, 80, 82, 85, 89, 92

**1** $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{55 + 62 + 75 + 80 + 82 + 85 + 89 + 92}{8}$

$\bar{x} = \dfrac{620}{8}$

$\bar{x} = 77{,}5$

**2** $77{,}5 - 55 = 22{,}5$ $\quad$ $82 - 77{,}5 = 4{,}5$

$77{,}5 - 62 = 15{,}5$ $\quad$ $85 - 77{,}5 = 7{,}5$

$77{,}5 - 75 = 2{,}5$ $\quad$ $89 - 77{,}5 = 11{,}5$

$80 - 77{,}5 = 2{,}5$ $\quad$ $92 - 77{,}5 = 14{,}5$

**3** $22{,}5 + 15{,}5 + 2{,}5 + 2{,}5 + 4{,}5 + 7{,}5 + 11{,}5 + 14{,}5 = 81$

**4** Écart moyen $= \dfrac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$

Écart moyen $= \dfrac{81}{8}$

Écart moyen $\approx 10{,}13$

**RÉPONSE** L'écart moyen est de 10,13.

★**2.** Quel est l'écart moyen de la distribution ci-contre ?

| | |
|---|---|
| 3 | 1, 3, 3 |
| 4 | 7, 7, 8 |
| 5 | 2, 4 |
| 6 | 0 |

**1** $\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{31 + 33 + 33 + 47 + 47 + 48 + 52 + 54 + 60}{9}$

$\bar{x} = \dfrac{405}{9}$

$\bar{x} = 45$

**2** $45 - 31 = 14$ $\quad$ $48 - 45 = 3$

$45 - 33 = 12$ $\quad$ $52 - 45 = 7$

$45 - 33 = 12$ $\quad$ $54 - 45 = 9$

$47 - 45 = 2$ $\quad$ $60 - 45 = 15$

$47 - 45 = 2$

**3** $14 + 12 + 12 + 2 + 2 + 3 + 7 + 9 + 15 = 76$

**4** Écart moyen $= \dfrac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$

Écart moyen $= \dfrac{76}{9}$

Écart moyen $= 8{,}\overline{4}$

**RÉPONSE** L'écart moyen est de $8{,}\overline{4}$.

★★**3.** Pour savoir qui embaucher, une entreprise fait passer un test aux candidats et candidates. Les personnes qu'elle retient sont uniquement celles qui obtiennent un résultat supérieur à la moyenne et à l'écart moyen. Voici les résultats sur 20 des 10 dernières personnes qui ont passé le test. Combien d'entre elles l'entreprise retiendra-t-elle ?

**18, 11, 16, 12, 10, 19, 17, 18, 13, 11**

**1** Calcul de la moyenne

$\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{18 + 11 + 16 + 12 + 10 + 19 + 17 + 18 + 13 + 11}{10}$

$\bar{x} = \dfrac{145}{10}$

$\bar{x} = 14{,}5$

Ainsi, les personnes ayant obtenu 10, 11, 12 et 13 bonnes réponses sont exclues.

**2** Calcul de l'écart moyen

$18 - 14{,}5 = 3{,}5$ $\quad$ $19 - 14{,}5 = 4{,}5$

$14{,}5 - 11 = 3{,}5$ $\quad$ $17 - 14{,}5 = 2{,}5$

$16 - 14{,}5 = 1{,}5$ $\quad$ $18 - 14{,}5 = 3{,}5$

$14{,}5 - 12 = 2{,}5$ $\quad$ $14{,}5 - 13 = 1{,}5$

$14{,}5 - 10 = 4{,}5$ $\quad$ $14{,}5 - 11 = 3{,}5$

$3{,}5 + 3{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 4{,}5 + 4{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5 + 1{,}5 + 3{,}5 = 31$

$\text{Écart moyen} = \dfrac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$

$\text{Écart moyen} = \dfrac{31}{10}$

$\text{Écart moyen} = 3{,}1$

Ainsi, uniquement les personnes ayant obtenu 18 ou 19 bonnes réponses seront retenues.

**RÉPONSE** L'entreprise retiendra trois personnes.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# 7.3 LE RANG CENTILE

## Calculer un rang centile

Le rang centile est une mesure statistique permettant de situer une donnée par rapport aux autres données d'une distribution. Il correspond à un pourcentage indiquant la proportion des données inférieures ou égales à cette donnée.

**EXEMPLE**

**Calculer le rang centile**

Cette semaine, les élèves de 4e secondaire de l'école de Jordan avaient un examen de sciences. Lorsqu'il reçoit sa copie corrigée, Jordan se rend compte que son rang centile est de 86. Ainsi, 86 % des élèves de 4e secondaire ont obtenu un résultat inférieur ou égal au sien.

Afin de calculer un rang centile, on utilise la formule suivante.

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

Si la réponse n'est pas un nombre entier, on arrondit toujours à l'entier **supérieur**.

**EXEMPLE**

**Déterminer le rang centile de la 45e donnée dans la distribution suivante.**

18, 18, 19, 20, … , 40, 40, 45, 45, 45, 47, 48, 49, … , 60, 61, 61, 65, 67

**64 données** **43 données**

| | |
|---|---|
| **1.** Calculer le nombre de données inférieures à la donnée. | 18, 18, 19, 20, … , 40, 40<br>**64 données**<br>Il y a donc 70 données inférieures à 45. |
| **2.** Calculer le nombre de fois que la donnée apparaît dans la distribution. | Ici, la 45e donnée apparaît à trois reprises dans la distribution. |
| **3.** Calculer le rang centile à l'aide de la formule. | $\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$<br>$\text{Rang centile} = \frac{70 + \frac{3}{2}}{124} \cdot 100$<br>$\text{Rang centile} = \frac{71{,}5}{124} \cdot 100$<br>$\text{Rang centile} \approx 57{,}66$<br>$\text{Rang centile} = 58$<br>Ainsi, 58 % des données sont inférieures ou égales à 45. |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

★**1.** Calculez le rang centile de la donnée en vert dans chaque distribution.

**a** 112, 112, 115, 116, 120, 120, 120, 121, 130, 130, 132, 134, 150

**1** 10 données inférieures

**2** 1 donnée de valeur égale

**3** $\text{Rang centile} = \dfrac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$

$$\text{Rang centile} = \frac{10 + \frac{1}{2}}{13} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{10{,}5}{13} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} \approx 80{,}77$$

$$\text{Rang centile} = 81$$

**RÉPONSE** Le rang centile de 132 est 81.

**b** 44, 45, 45, 46, 46, 46, … , 75, 75, 75, 76, 77, 78, 78, 78, 78, 78, 80, 80

**144 données**

**1** 155 données inférieures

**2** 5 données de valeur égale

**3** $\text{Rang centile} = \dfrac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$

$$\text{Rang centile} = \frac{155 + \frac{5}{2}}{162} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{157{,}5}{162} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} \approx 97{,}2$$

$$\text{Rang centile} = 98$$

**RÉPONSE** Le rang centile de 78 est 98.

**c** 274, 275, 276, 276, 277, 280, 280, 280, 280, 281, 282, 283, 284, 284, 284

**1** 2 données inférieures

**2** 2 données de valeur égale

**3** $\text{Rang centile} = \dfrac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$

$$\text{Rang centile} = \frac{2 + \frac{2}{2}}{15} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{3}{15} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = 20$$

**RÉPONSE** Le rang centile de 276 est 20.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**2.** Yasmine a obtenu 76 % à son dernier examen. Deux élèves parmi les 33 que compte sa classe ont obtenu la même note qu'elle et 8 autres ont obtenu une meilleure note qu'elle. Quel est le rang centile de Yasmine pour cet examen ?

**1** $33 - 8 - 3 = 22$ données inférieures

**2** 3 données de valeur égale

**3** $\text{Rang centile} = \dfrac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = \dfrac{22 + \frac{3}{2}}{33} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = \dfrac{23{,}5}{33} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = 71{,}\overline{21}$

$\text{Rang centile} = 72$

**RÉPONSE** Le rang centile de Yasmine est 72.

★★**3.** Roger est un adepte de tennis. Voici la vitesse, en km/h, de ses huit derniers services.

**177, 180, 168, 164, 184, 185, 180, 178**

Quel est le rang centile de la moyenne de la vitesse de ses huit derniers services ?

**1** Calcul de la moyenne

$\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{177 + 180 + 168 + 164 + 184 + 185 + 180 + 178}{8}$

$\bar{x} = \dfrac{1416}{8}$

$\bar{x} = 177$ km/h

**2** Rang centile de 177

2 données inférieures

1 donnée de valeur égale

**3** $\text{Rang centile} = \dfrac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}}{8} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = \dfrac{2{,}5}{8} \cdot 100$

$\text{Rang centile} = 31{,}25$

$\text{Rang centile} = 32$

**RÉPONSE** Le rang centile de la moyenne des huit derniers services de Roger est 32.

## Déterminer une donnée à partir du rang centile

Il est également possible de trouver une donnée à partir du rang centile. Pour ce faire, on utilise la formule suivante, qui donne le nombre de données inférieures ou égales à la donnée et non la donnée comme telle.

$$\textbf{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{\textbf{Rang centile}}{100} \bullet \textbf{Nombre total de données}$$

Si la réponse n'est pas un nombre entier, il faut arrondir à l'entier **inférieur**.

**EXEMPLE**

**Déterminer la donnée qui a un rang centile de 84 dans la distribution suivante.**

**3, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7, ..., 22, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 28, 28, 28, 29**

**21 données**

| | |
|---|---|
| **1.** Remplacer les valeurs connues dans la formule et trouver le nombre de données inférieures ou égales à la donnée. | Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{\text{Rang centile}}{100} \bullet$ Nombre total de données<br>Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{84}{100} \bullet 42$<br>Nombre de données inférieures ou égales $= 35{,}28$<br>Nombre de données inférieures ou égales $= 35$ |
| **2.** Identifier la donnée recherchée dans la distribution. | Ici, on s'intéresse à la 35e donnée.<br>3, 3, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 7, ... , 22, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 28, 28, 28, 29<br>**21 données**<br>La 35e donnée est 24, celle qui a un rang centile de 84. |

## EXERCICES

**1.** Dans la table de valeur suivante, déterminez la donnée ayant un rang centile de 42.

| DONNÉE | EFFECTIF |
|---|---|
| 2 | 69 |
| 3 | 54 |
| 4 | 82 |
| 5 | 28 |

**1** Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{\text{Rang centile}}{100} \bullet$ Nombre total de données

Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{42}{100} \bullet 233$

Nombre de données inférieures ou égales $= 97{,}86$

Nombre de données inférieures ou égales $= 97$

**2** La 97e donnée est 3.

**RÉPONSE** La donnée ayant un rang centile de 42 est 3.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★**2.** Dans chacune des distributions suivantes, déterminez la donnée ayant le rang centile indiqué.

**a** **Rang centile : 67**

1023, 1023, 1025, 1026, 1026, 1026, 1032, 1033, 1033, 1033, 1033, 1033, 1035, 1036, 1036, 1040, 1040, 1041, 1042, 1042, 1045, 1045, 1045, 1046, 1047, 1050

**1** Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot$ Nombre total de données

Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{67}{100} \cdot 26$

Nombre de données inférieures ou égales $= 17{,}42$

Nombre de données inférieures ou égales $= 17$

**2** La 17e donnée est 1040.

**RÉPONSE** La donnée ayant un rang centile de 67 est 1040.

**b** **Rang centile : 95**

12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, … , 21, 21, 22, 22, 22, 26

**52 données**

**1** Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot$ Nombre total de données

Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{95}{100} \cdot 65$

Nombre de données inférieures ou égales $= 61{,}75$

Nombre de données inférieures ou égales $= 61$

**2** La 61e donnée est 21.

**RÉPONSE** La donnée ayant un rang centile de 95 est 21.

★★**3.** Lors de la dernière compétition de lancer du javelot, Alexandra a très bien performé. En fait, les juges lui ont attribué un rang centile de 93 parmi les 257 concurrents. Quelle position dans le classement sa performance lui a-t-elle value ?

**1** Nombre de personnes ayant terminé derrière Alexandra ou à égalité avec elle

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot \text{Nombre total de données}$$

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{93}{100} \cdot 257$$

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = 239{,}01$$

Nombre de données inférieures ou égales = 239

**2** Nombre de personnes ayant terminé devant Alexandra

257 – 239 = 18 personnes devant Alexandra

**RÉPONSE** Puisque 18 personnes l'ont devancée dans le classement, Alexandra a terminé en 19e position.

★★**4.** Chaque année, Jimmy participe au marathon organisé dans sa ville. L'an dernier, il a terminé au 76e rang sur 156. Cette année, son rang centile s'est amélioré de huit points. S'il y avait 142 participants et participants cette année, à quel rang Jimmy a-t-il terminé ?

**1** Rang centile de Jimmy l'année dernière

156 – 76 = 80 données inférieures à Jimmy

1 donnée égale

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{80 + \frac{1}{2}}{156} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{80{,}5}{156} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} \approx 51{,}60$$

Rang centile = 52

**2** Rang centile de Jimmy cette année

52 + 8 = 60

**3** Nombre de personnes inférieures ou égales à Jimmy cette année

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot \text{Nombre total de données}$$

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{60}{100} \cdot 142$$

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = 85{,}2$$

Nombre de données inférieures ou égales = 85

**4** Position de Jimmy cette année

142 – 85 = 57 personnes devant lui, donc la 58e position

**RÉPONSE** Jimmy a terminé le marathon en 58e position cette année.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**5.** Les organisateurs d'un gala Méritas veulent mettre en nomination uniquement les élèves qui ont su se démarquer de leurs pairs. Ils ont décidé de ne sélectionner que ceux et celles qui ont eu un écart correspondant à au moins deux écarts moyens au-dessus de la moyenne ainsi qu'un rang centile de 90 ou plus. Voici les résultats des élèves de cette école. Combien d'élèves seront en nomination si l'écart moyen est de 14,42 ?

**30, 33, 33, 35, 36, 37, 40, 40, 40, 42, 42, 48, 48, 52, 53, 55, 55, 55, 55, 55, 56, 57, 58, 58, 58, 58, 59, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 60, 61, 61, 62, 62, 63, 65, 65, 67, 69, 70, 72, 72, 72, 74, 74, 76, 76, 79, 79, 79, 79, 80, 80, 80, 83, 85, 86, 86, 88, 89, 91, 91, 92, 94, 95, 96, 98**

**1** Calcul de la moyenne

$\bar{x} = \dfrac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$

$\bar{x} = \dfrac{4719}{73}$

$\bar{x} \approx 64{,}64$

**2** Calcul de la note correspondant à deux écarts moyens au-dessus de la moyenne

$64{,}64 + 14{,}42 + 14{,}42 = 93{,}48$

Donc, les élèves ayant obtenu des notes de 94, 95, 96 et 98 répondent au premier critère.

**3** Nombre d'élèves inférieurs à la donnée ayant un rang centile de 90

$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \dfrac{\text{Rang centile}}{100} \cdot \text{Nombre total de données}$

$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \dfrac{90}{100} \cdot 73$

$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = 65{,}7$

$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = 65$

**4** Élèves répondant au second critère

$73 - 65 = 8$

Donc les élèves ayant obtenu des notes de 89, 91, 91, 92, 94, 95, 96 et 98 répondent au deuxième critère.

**5** Élèves en nomination

Les élèves qui répondent aux deux critères sont ceux et celles qui ont obtenu des notes de 94, 95, 96, 98.

**RÉPONSE** Les organisateurs mettront quatre élèves en nomination.

# 7.4 LES TABLEAUX À DOUBLE ENTRÉE, LA CORRÉLATION ET LES NUAGES DE POINTS

## Représenter un tableau à double entrée et interpréter la corrélation

En statistique, il arrive qu'une étude porte sur deux caractères afin d'établir s'il existe un lien entre eux.

Un tableau à double entrée est l'un des modes de représentation pour ce type de distribution. Ainsi, l'une des variables est représentée par les colonnes du tableau et l'autre par les rangées.

**EXEMPLE**

**Temps que les gens passent sur les réseaux sociaux par semaine selon l'âge**

| TEMPS (h) \ ÂGE | [0, 10[ | [10, 20[ | [20, 30[ | [30, 40[ | [40, 50[ | [50, 60[ | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [0, 5[ | 50 | 20 | 2 | 15 | 30 | 70 | **187** |
| [5, 10[ | 20 | 25 | 10 | 20 | 45 | 50 | **170** |
| [10, 15[ | 10 | 35 | 25 | 60 | 50 | 25 | **205** |
| [15, 20[ | 5 | 45 | 50 | 45 | 20 | 5 | **170** |
| [20, 25[ | 1 | 30 | 20 | 15 | 10 | 0 | **76** |
| [25, 30[ | 0 | 10 | 5 | 0 | 2 | 0 | **17** |
| **TOTAL** | **86** | **165** | **112** | **155** | **157** | **150** | 825 |

Le 45 indique qu'il y a 45 personnes âgées entre 10 et 20 ans qui passent entre 15 et 20 heures sur les réseaux sociaux par semaine.

Le 30 indique qu'il y a 30 personnes âgées entre 40 et 50 ans qui passent entre 0 et 5 heures sur les réseaux sociaux par semaine.

Le 205 indique qu'il y a 205 personnes parmi celles interrogées qui passent entre 10 et 15 heures sur les réseaux sociaux par semaine, peu importe leur âge.

Le 825 indique qu'il y a 825 personnes qui ont été interrogées pour cette étude.

On peut également remarquer qu'en général, plus l'âge des gens augmente, moins les gens passent de temps sur les réseaux sociaux.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

La **corrélation** permet de qualifier le sens et l'intensité du lien qui unit les deux variables.

**Sens**

- Si les deux variables varient dans le même sens (les deux augmentent ou les deux diminuent), on dit que la corrélation est positive.
- Si les deux variables varient dans le sens inverse (l'une augmente pendant que l'autre diminue), on dit que la corrélation est négative.

**Intensité**

Une corrélation peut être nulle, faible, moyenne, forte ou parfaite selon l'intensité du lien entre les deux variables.

* Il est à noter que des variables pourraient suivre différents modèles, mais nous nous limiterons à la corrélation linéaire pour le cours CST.

Dans un tableau à double entrée, il est possible d'interpréter la corrélation en fonction de la façon dont les données sont représentées. Pour établir la corrélation, il faut s'intéresser aux deux diagonales.

**Sens**

- Si les données se rapprochent d'une diagonale allant d'en haut à gauche à en bas à droite, on dit que la corrélation est positive (↘).
- Si les données se rapprochent d'une diagonale allant d'en bas à gauche à en haut à droite, on dit que la corrélation est négative (↗).

**Intensité**

Plus les données se rapprochent d'une diagonale, plus la corrélation est forte.
Plus elles s'en éloignent, plus la corrélation est faible, voire nulle dans certains cas.

**EXEMPLE**

**Temps que les gens passent sur les réseaux sociaux par semaine selon l'âge**

| TEMPS (h) \ ÂGE | [0, 10[ | [10, 20[ | [20, 30[ | [30, 40[ | [40, 50[ | [50, 60[ | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [0, 5[ | 50 | 20 | 2 | 15 | 30 | 70 | **187** |
| [5, 10[ | 20 | 25 | 10 | 20 | 45 | 50 | **170** |
| [10, 15[ | 10 | 35 | 25 | 60 | 50 | 25 | **205** |
| [15, 20[ | 5 | 45 | 50 | 45 | 20 | 5 | **170** |
| [20, 25[ | 1 | 30 | 20 | 15 | 10 | 0 | **76** |
| [25, 30[ | 0 | 10 | 5 | 0 | 2 | 0 | **17** |
| TOTAL | **86** | **165** | **112** | **155** | **157** | **150** | **825** |

On remarque qu'en général, les données forment une diagonale allant d'en bas à gauche à en haut à droite. On qualifie alors la corrélation de négative.

De plus, les données ne sont pas très concentrées sur cette diagonale. On qualifie alors la corrélation de moyenne.

La corrélation entre l'âge et le temps passé sur les réseaux sociaux est donc négative et moyenne.

# EXERCICES

★1. Pour chacun des tableaux à double entrée ci-dessous, déterminez le sens et l'intensité de la corrélation.

**a**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 3 | 7 | 6 | 21 |
| 2 | 6 | 1 | 5 | 3 | 5 | 20 |
| 3 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 16 |
| TOTAL | 14 | 3 | 12 | 14 | 14 | 57 |

**Sens** Négative

**Intensité** Faible

**b**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 10 | 2 | 2 | 1 | 25 |
| 2 | 10 | 15 | 20 | 10 | 1 | 56 |
| 3 | 2 | 2 | 2 | 25 | 30 | 61 |
| TOTAL | 22 | 27 | 24 | 37 | 32 | 142 |

**Sens** Positive

**Intensité** Forte

**c**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 10 | 6 | 8 | 7 | 41 |
| 2 | 8 | 10 | 10 | 12 | 10 | 50 |
| 3 | 8 | 10 | 8 | 10 | 12 | 48 |
| TOTAL | 26 | 30 | 24 | 30 | 29 | 139 |

**Sens** Positive

**Intensité** Faible

**d**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 1 | 6 | 2 | 5 | 3 | 17 |
| 3 | 5 | 4 | 3 | 1 | 0 | 13 |
| TOTAL | 6 | 11 | 5 | 8 | 6 | 36 |

**Sens** Négative

**Intensité** Forte

**e**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 | 10 | 10 | 10 | 40 |
| 2 | 10 | 10 | 10 | 10 | 5 | 45 |
| 3 | 10 | 10 | 5 | 5 | 5 | 35 |
| TOTAL | 25 | 25 | 25 | 25 | 20 | 120 |

**Sens** Négative

**Intensité** Moyenne

**f**

| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20 | 15 | 10 | 5 | 5 | 55 |
| 2 | 15 | 25 | 25 | 10 | 15 | 90 |
| 3 | 5 | 10 | 10 | 20 | 20 | 65 |
| TOTAL | 40 | 50 | 45 | 35 | 40 | 210 |

**Sens** Positive

**Intensité** Moyenne

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**2.** Représentez chaque situation à l'aide d'un tableau à double entrée. Qualifiez ensuite la corrélation dont il est question.

**a** Le nombre d'animaux domestiques en fonction du nombre de personnes vivant dans une maison

**(4, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2), (2, 3), (1, 3), (5, 1), (2, 1), (5, 0), (4, 2), (2, 4), (5, 0), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (1, 4), (1, 3), (4, 2), (5, 1), (4, 1), (3, 3), (2, 2), (3, 4), (1, 1), (2, 4), (1, 5), (3, 4), (4, 0)**

| Nombre de personnes \ Nombre d'animaux | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 | 7 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 8 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 0 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| 5 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| Total | 3 | 6 | 5 | 6 | 5 | 4 | 29 |

**RÉPONSE** La corrélation est négative et forte.

**b** Le nombre d'enfants en fonction de l'âge du parent

**(86, 2), (45, 4), (30, 1), (12, 0), (44, 1), (50, 0), (72, 3), (21, 1), (30, 2), (33, 1), (67, 1), (91, 0), (48, 3), (42, 4), (35, 2), (14, 0), (18, 1), (20, 0), (71, 4), (54, 2), (59, 3), (40, 3), (28, 2), (36, 3), (51, 2), (76, 3), (83, 1), (42, 0), (16, 0), (27, 3), (30, 1), (45, 1), (72, 3), (84, 1), (94, 3), (55, 2)**

| Âge \ Nombre d'enfants | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| [0, 20[ | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| [20, 40[ | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 10 |
| [40, 60[ | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 12 |
| [60, 80[ | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 5 |
| [80, 100[ | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| Total | 7 | 10 | 7 | 9 | 3 | 36 |

**RÉPONSE** La corrélation est positive et moyenne.

★★**3.** Le tableau suivant représente le nombre d'animaux que possèdent les élèves d'une école selon leur âge.

| ÂGE DES ÉLÈVES / NOMBRE D'ANIMAUX | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 ET PLUS | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | 150 | 128 | 201 | 34 | 41 | 554 |
| **13** | 64 | 125 | 287 | 236 | 20 | 732 |
| **14** | 58 | 182 | 94 | 48 | 15 | 397 |
| **15** | 50 | 97 | 88 | 74 | 23 | 332 |
| **16** | 23 | 122 | 95 | 33 | 33 | 306 |
| **TOTAL** | 345 | 654 | 765 | 425 | 132 | 2321 |

**a** Complétez le tableau ci-dessus.

**b** Quel pourcentage des élèves de l'école ont 15 ans ?

Nombre d'élèves de 15 ans : 332
Nombre d'élèves au total : 2321
Pourcentage : $\frac{332}{2321} \cdot 100 \approx 14{,}30\,\%$

**RÉPONSE** 14,30 % des élèves ont 15 ans.

**c** Quel pourcentage des élèves ont quatre animaux et plus ?

Nombre d'élèves ayant quatre animaux et plus : 132
Nombre d'élèves au total : 2321
Pourcentage : $\frac{132}{2321} \cdot 100 \approx 5{,}69\,\%$

**RÉPONSE** 5,69 % des élèves ont quatre animaux et plus.

**d** Quel pourcentage des élèves ont 13 ans et ne possèdent aucun animal ?

Nombre d'élèves de 13 ans n'ayant aucun animal : 64
Nombre d'élèves au total : 2321
Pourcentage : $\frac{64}{2321} \cdot 100 \approx 2{,}76\,\%$

**RÉPONSE** 2,76 % des élèves ont 13 ans et ne possèdent aucun animal.

**e** Comment qualifieriez-vous la corrélation entre ces deux variables ?

La corrélation est nulle.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

## Représenter une situation à l'aide d'un nuage de points

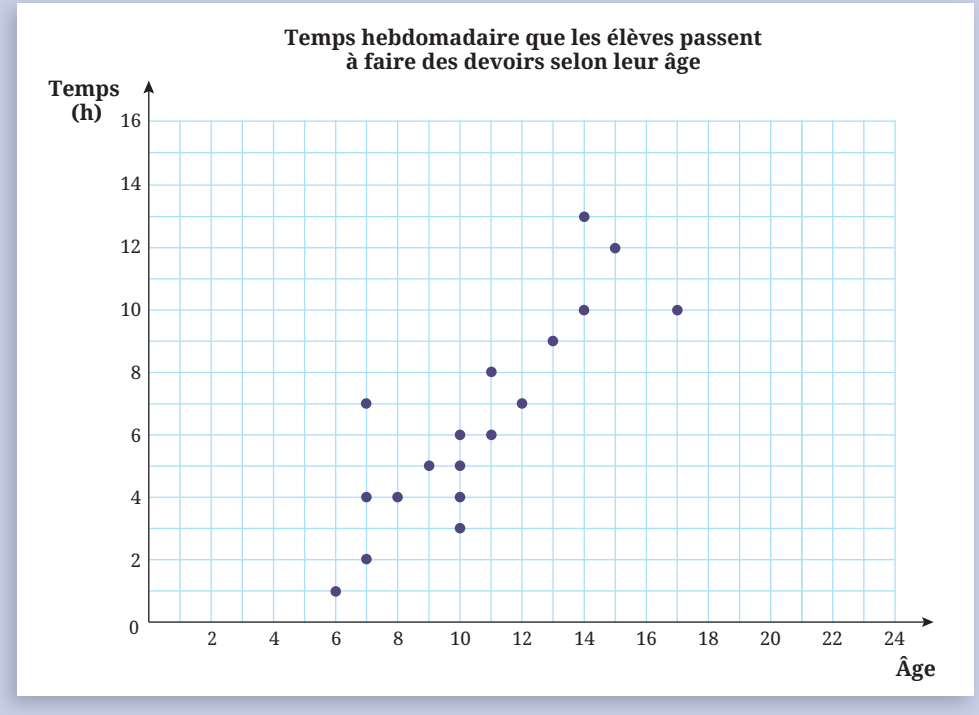
En plus du tableau à double entrée, une étude statistique à deux caractères peut être représentée à l'aide d'un **nuage de points**.

Pour ce faire, il suffit de placer chaque couple dans un plan cartésien.

**EXEMPLE**

**Les couples suivants représentent le temps hebdomadaire, en heures, que les élèves passent à faire des devoirs selon leur âge.**

(7, 4), (15, 12), (10, 5), (12, 7), (16, 20), (6, 1), (11, 8), (10, 6), (13, 9), (17, 10), (14, 10), (7, 2), (10, 3), (15, 16), (14, 13), (16, 18), (8, 4), (9, 5), (10, 4), (11, 6), (16, 16), (17, 19), (9, 5), (7, 7)




Tout comme dans un tableau à double entrée, il est possible de qualifier la corrélation entre les deux variables dans le nuage de points.

### Sens

- Si les données forment une diagonale allant d'en haut à gauche à en bas à droite, on dira que la corrélation est négative (↘).
- Si les données forment une diagonale allant d'en bas à gauche à en haut à droite, on dira que la corrélation est positive (↗).

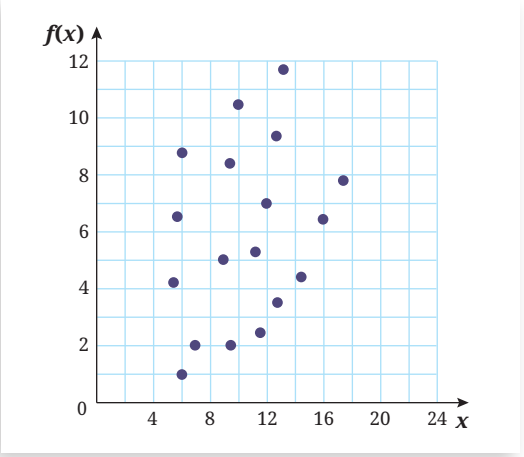
* ATTENTION ! Le sens est inverse à celui du tableau à double entrée.

### Intensité

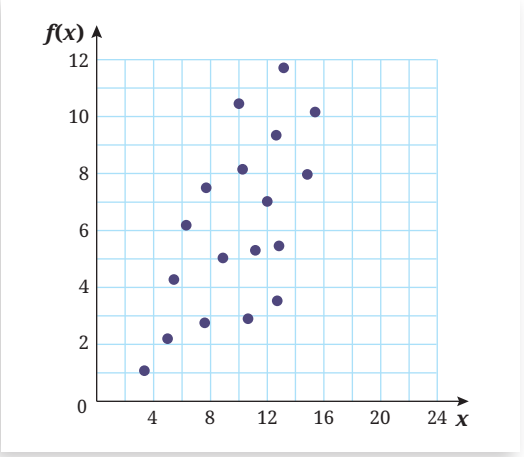
Plus les données se rapprochent d'une ligne droite, plus la corrélation sera forte.
Plus les points s'éloignent d'une ligne droite, plus la corrélation est faible.

**EXEMPLES**

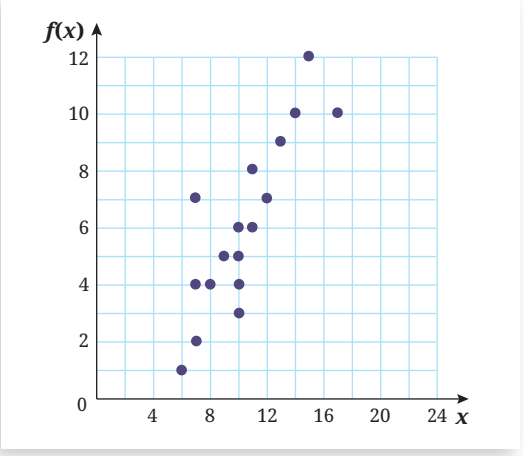
**1.** Corrélation faible et positive



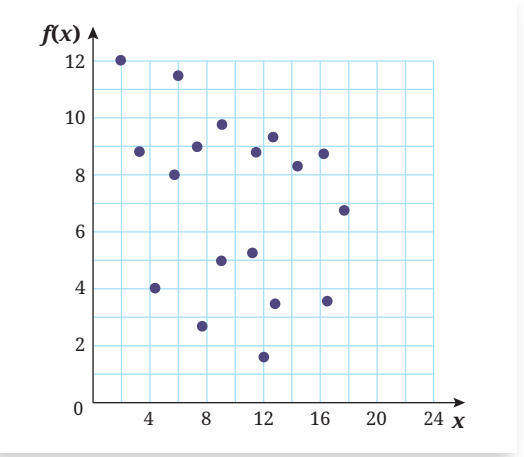

**2.** Corrélation moyenne et positive



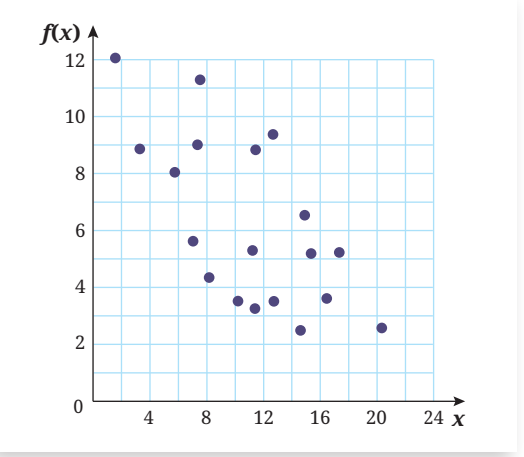

**3.** Corrélation forte et positive



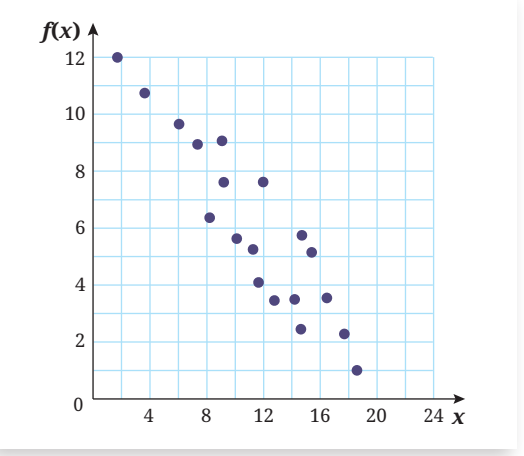

**4.** Corrélation faible et négative




**5.** Corrélation moyenne et négative




**6.** Corrélation forte et négative



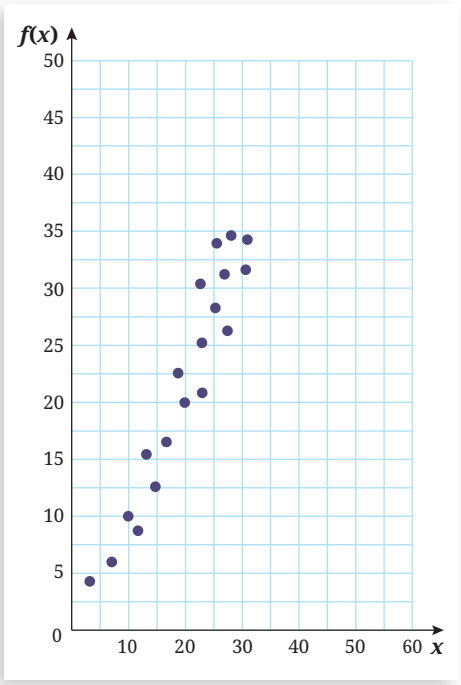

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# EXERCICES

★1. Qualifiez le sens et l'intensité de la corrélation dans chaque nuage de points.

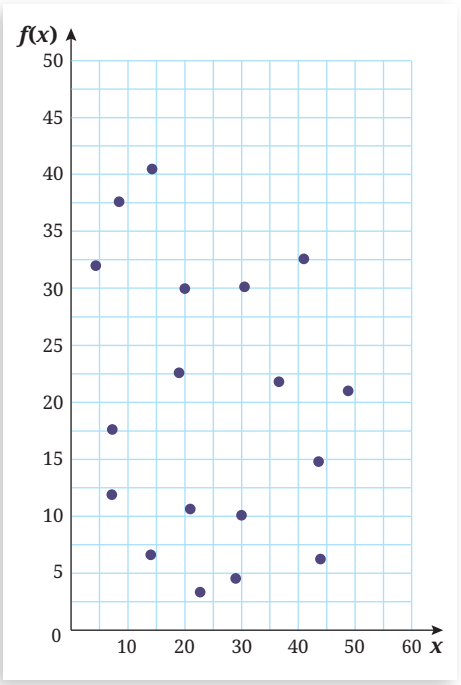
**a**




**Sens** Positive

**Intensité** Forte

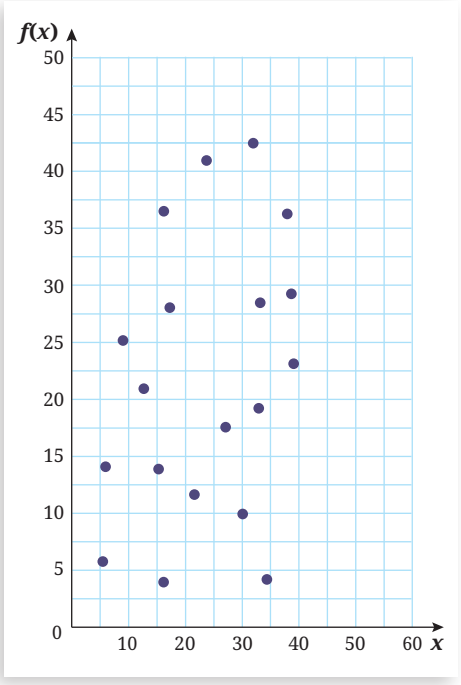
**c**




**Sens** Négative

**Intensité** Faible

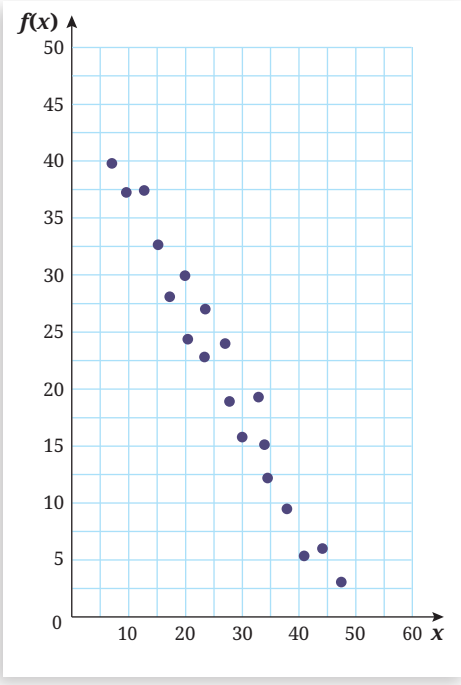
**b**




**Sens** Positive

**Intensité** Faible

**d**

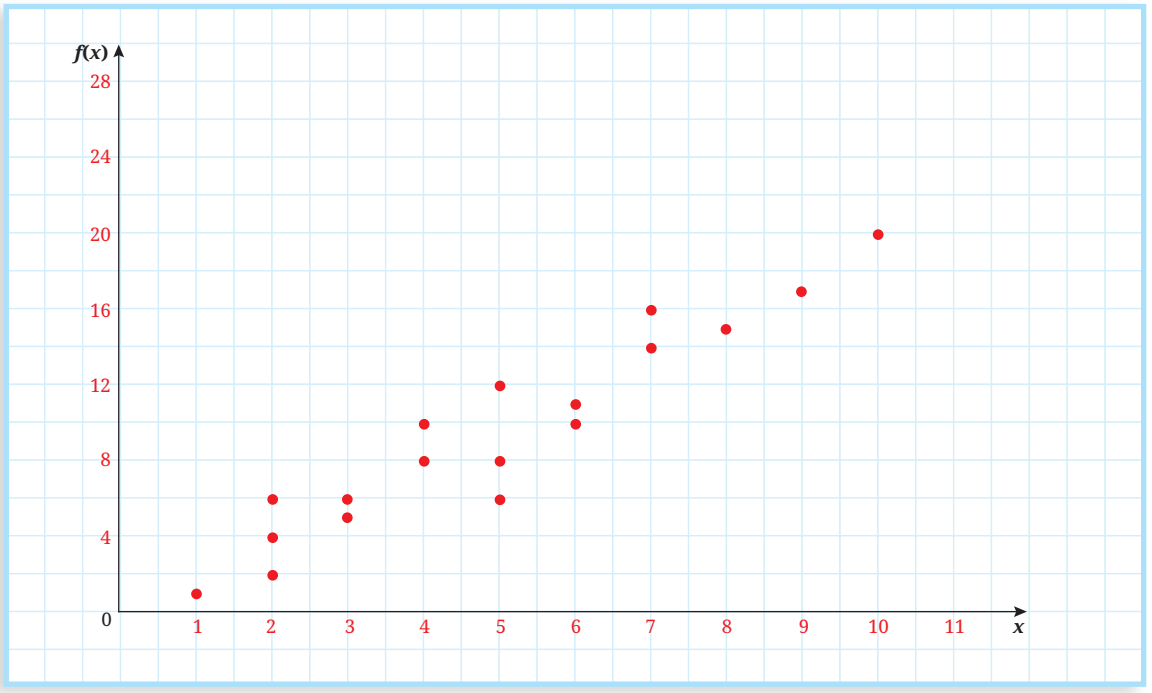



**Sens** Négative

**Intensité** Forte

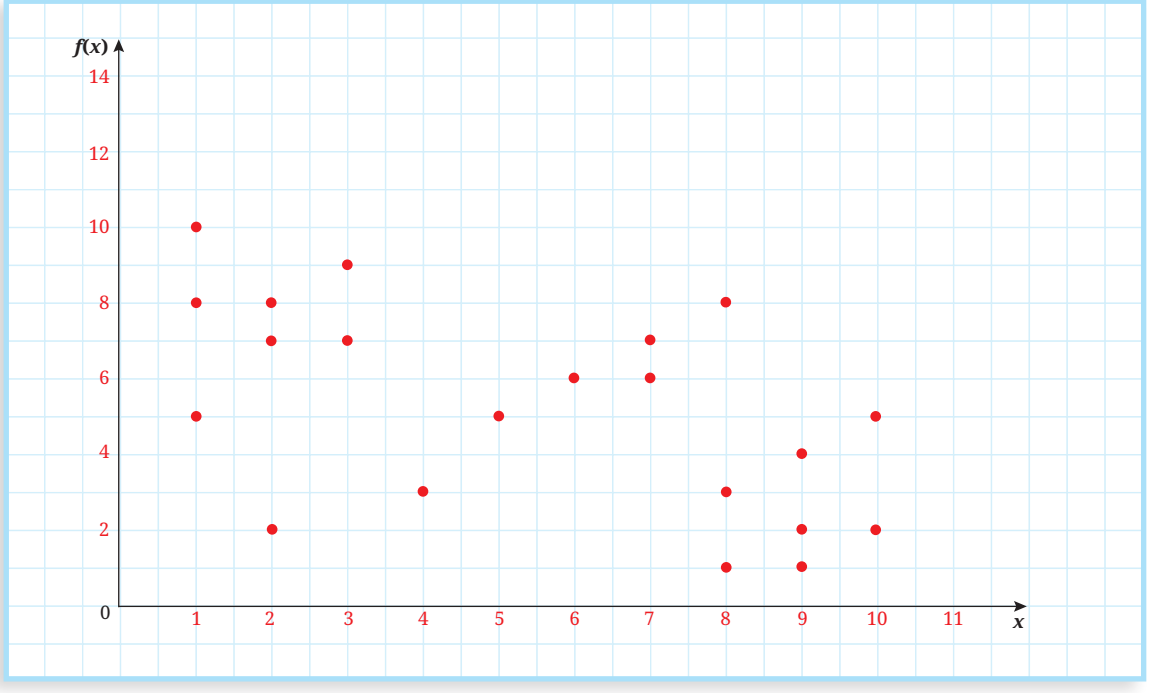
★**2.** Représentez chaque série de couples dans un plan cartésien afin de former un nuage de points. Ensuite, qualifiez le sens et l'intensité de la corrélation.

**a** (4, 8), (5, 8), (3, 6), (10, 20), (8, 15), (7, 16), (6, 11), (1, 1), (3, 5), (2, 6), (2, 2), (6, 10), (5, 12), (5, 6), (2, 4), (4, 10), (7, 14), (9, 17)




**Sens** Positive **Intensité** Forte

**b** (1, 10), (2, 2), (10, 5), (8, 1), (3, 7), (4, 3), (3, 9), (7, 6), (8, 8), (10, 2), (1, 8), (2, 7), (9, 2), (8, 3), (9, 4), (1, 5), (2, 8), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (9, 1)




**Sens** Négative **Intensité** Faible

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

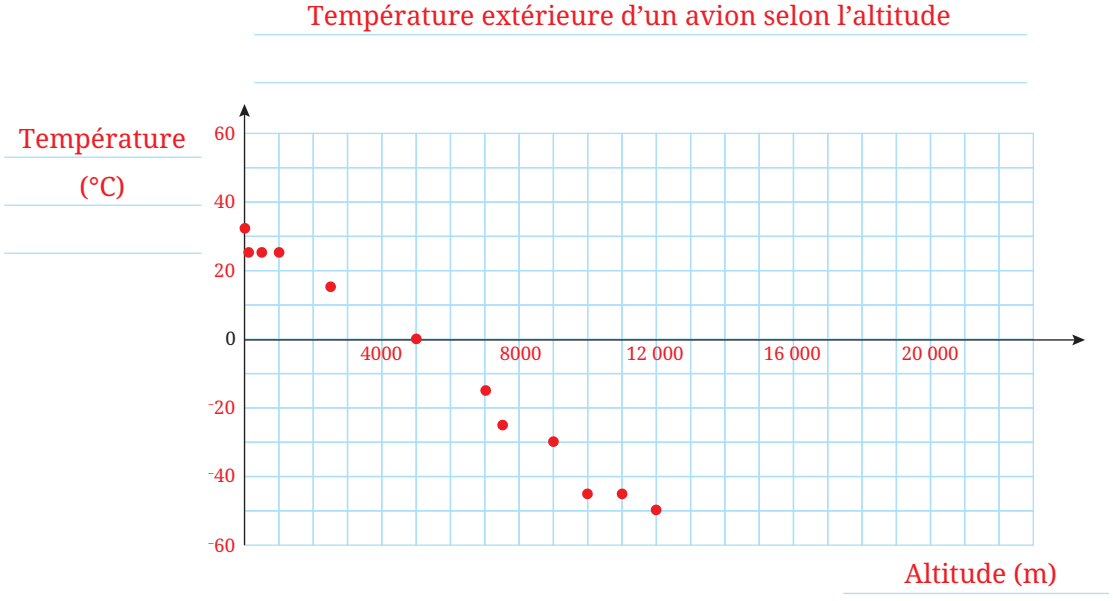
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

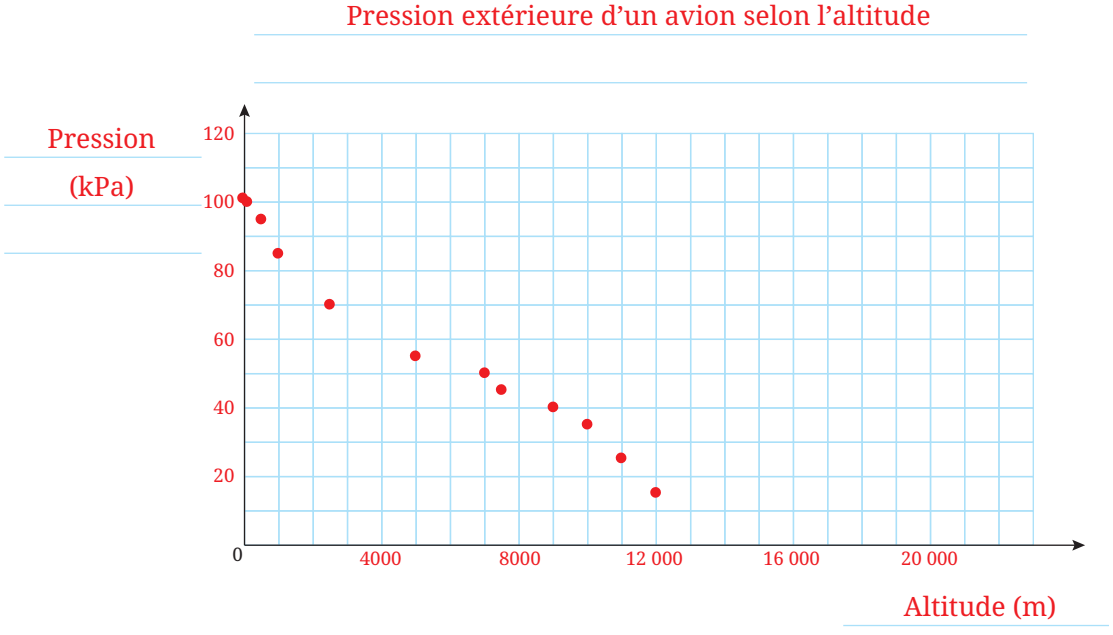
★★ **3.** La table des valeurs suivante représente les données prises au même moment par des avions volant à différentes altitudes.

| TEMPÉRATURE ET PRESSION EXTÉRIEURES D'AVIONS SELON L'ALTITUDE | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ALTITUDE (m)** | 0 | 100 | 500 | 1000 | 2500 | 5000 | 7000 | 7500 | 9000 | 10 000 | 11 000 | 12 000 |
| **TEMPÉRATURE (°C)** | 32 | 25 | 25 | 25 | 15 | 0 | ⁻15 | ⁻25 | ⁻30 | ⁻45 | ⁻45 | ⁻50 |
| **PRESSION (kPa)** | 101 | 100 | 95 | 85 | 70 | 55 | 50 | 45 | 40 | 35 | 25 | 15 |

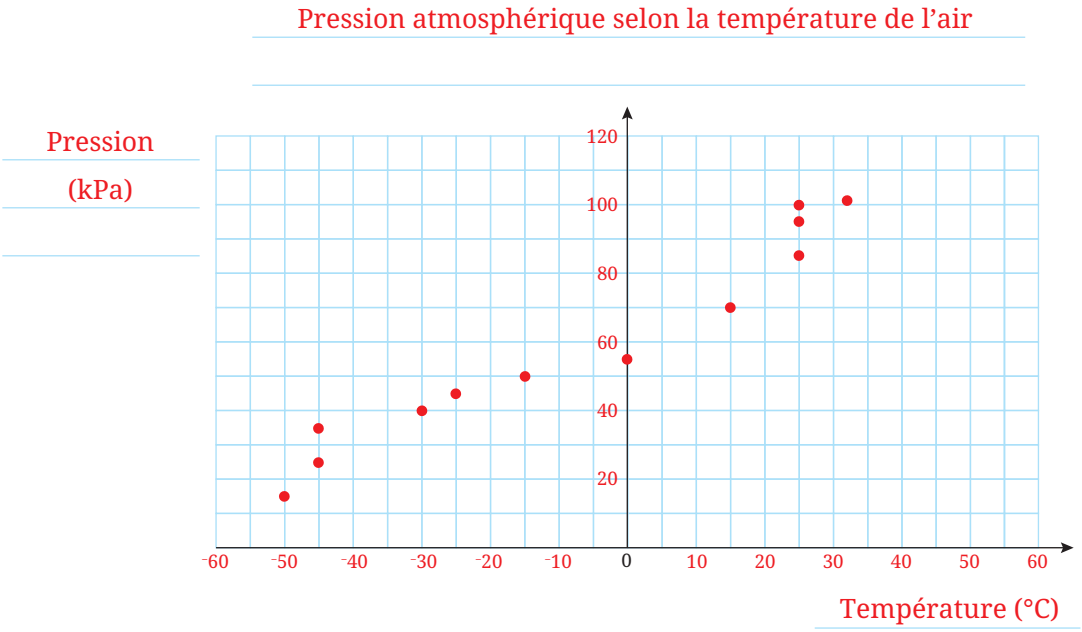
**a** À l'aide d'un nuage de points, représentez la relation entre la température de l'air et l'altitude.




**b** À l'aide d'un nuage de points, représentez la relation entre la pression atmosphérique et l'altitude.



**c** À l'aide d'un nuage de points, représentez la relation entre la pression atmosphérique et la température de l'air.




**d** Selon le nuage de points, y a-t-il un lien entre la température de l'air et la pression atmosphérique ? Justifiez votre réponse.

Comme la corrélation entre la température et la pression est forte, il y a un lien fort entre ces deux variables (ou toute réponse semblable).

**e** Classez les trois nuages de points précédents en ordre croissant d'intensité de corrélation.

b, a, c (La réponse peut varier selon l'échelle choisie par l'élève dans ses graphiques.)

**f** En vous fiant à vos nuages de points, déterminez approximativement la température et la pression extérieures d'un avion volant à une altitude de 6000 m.

La température de l'air serait d'environ −10 °C et la pression atmosphérique serait d'environ 52 kPa (ou toute réponse semblable).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Interpréter la corrélation à l'aide du coefficient de corrélation

Grâce à un nuage de points, il est possible d'évaluer plus précisément la corrélation.
À l'aide de la **méthode du rectangle**, on peut obtenir une valeur du coefficient de corrélation ($r$) avec la formule suivante.

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

où $r$ est le coefficient de corrélation
et où les mesures sont celles du rectangle formé dans le nuage de points.

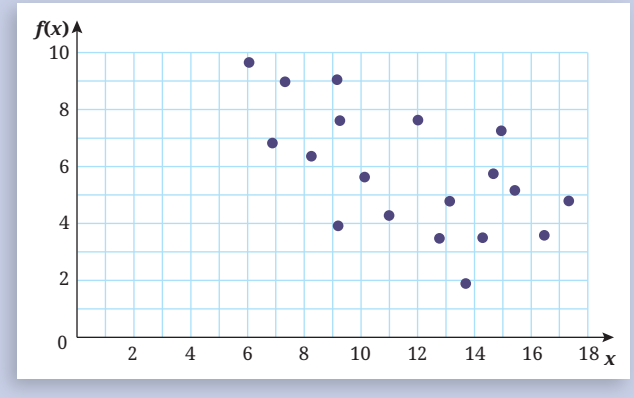
Dans cette formule, il faut ajouter le bon signe (positif ou négatif) devant la parenthèse ouvrante en fonction du sens de la corrélation.

Lorsqu'il est connu, il est possible d'associer au coefficient de corrélation une intensité à l'aide du tableau ci-contre.

| VALEUR DU COEFFICIENT DE CORRÉLATION | INTENSITÉ DE LA CORRÉLATION |
|---|---|
| Près de 0 | Nulle |
| Près de ±0,50 | Faible |
| Près de ±0,75 | Moyenne |
| Près de ±0,87 | Forte |
| Près de ±1 | Parfaite |

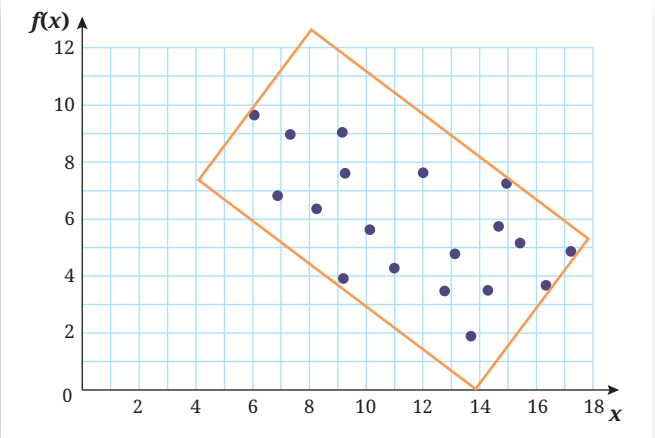
**EXEMPLE**

**Déterminer le coefficient de corrélation de la situation représentée par le nuage de points suivant.**




**1.** Tracer un rectangle autour du nuage de points.

* Il est important que le rectangle soit le plus petit possible, mais qu'il intègre tous les points du nuage.

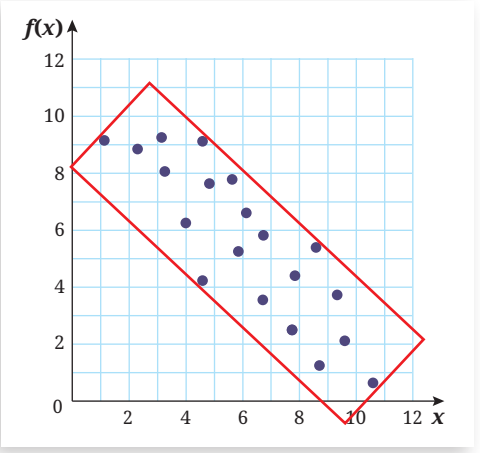


| | |
|---|---|
| **2.** Calculer la mesure de la longueur et de la largeur du rectangle. | Mesure du grand côté : 46 mm<br>Mesure du petit côté : 25 mm |
| **3.** Calculer le coefficient de corrélation à l'aide de la formule.<br>* Il faut s'assurer d'ajouter le bon signe dans la formule en fonction du sens de la corrélation. | $r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$<br>Ici, la corrélation est négative.<br>$r = -\left(1 - \frac{25}{46}\right)$<br>$r \approx -(1 - 0{,}52)$<br>$r \approx -0{,}46$ |
| **4.** Interpréter le coefficient à l'aide du tableau ci-dessus. | La corrélation entre les deux variables est faible et négative. |

## EXERCICES

★**1.** Calculez le coefficient de corrélation de chacun des nuages de points suivants, puis déterminez son sens et son intensité.

**a**




Mesure du grand côté : 49 mm
Mesure du petit côté : 15 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = -\left(1 - \frac{15}{49}\right)$

$r \approx -(1 - 0{,}30)$

$r \approx -0{,}70$

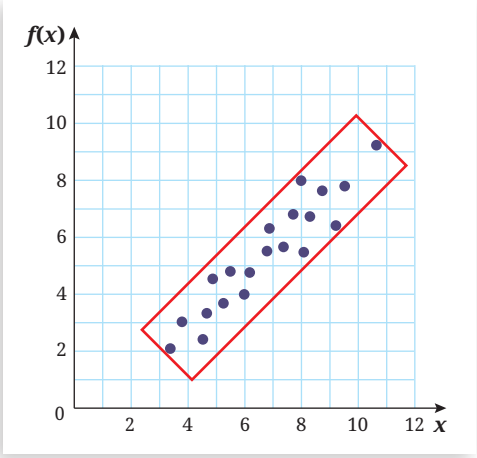
**RÉPONSE** Le coefficient de corrélation est de $-0{,}70$. La corrélation est donc négative et moyenne.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**b**




Mesure du grand côté : 40 mm
Mesure du petit côté : 10 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = \left(1 - \frac{10}{40}\right)$$

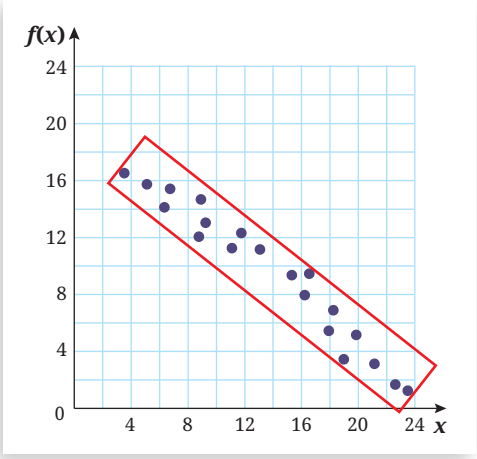
$$r = (1 - 0{,}25)$$

$$r = 0{,}75$$

**RÉPONSE**

Le coefficient de corrélation est de 0,75. La corrélation est donc positive et moyenne.

**c**




Mesure du grand côté : 49 mm
Mesure du petit côté : 8 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = -\left(1 - \frac{8}{49}\right)$$

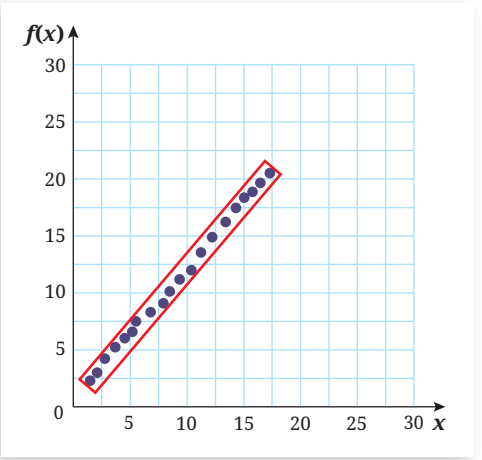
$$r \approx -(1 - 0{,}16)$$

$$r \approx -0{,}84$$

**RÉPONSE**

Le coefficient de corrélation est de $-0{,}84$. La corrélation est donc négative et forte.

**d**




Mesure du grand côté : 38 mm
Mesure du petit côté : 3 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = \left(1 - \frac{3}{38}\right)$

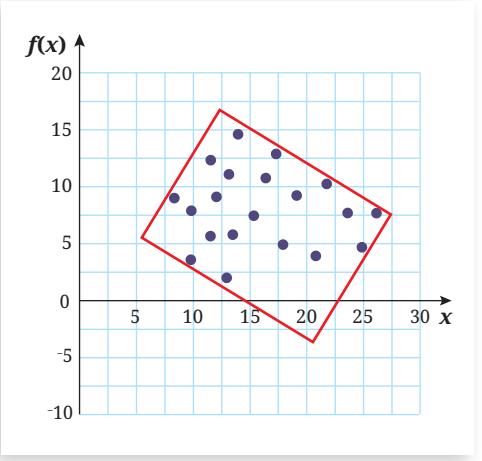
$r \approx (1 - 0{,}02)$

$r \approx 0{,}98$

**RÉPONSE**

Le coefficient de corrélation est de 0,98. La corrélation est donc positive et très forte.

**e**




Mesure du grand côté : 27 mm
Mesure du petit côté : 20 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = -\left(1 - \frac{20}{27}\right)$

$r \approx -(1 - 0{,}74)$

$r \approx -0{,}26$

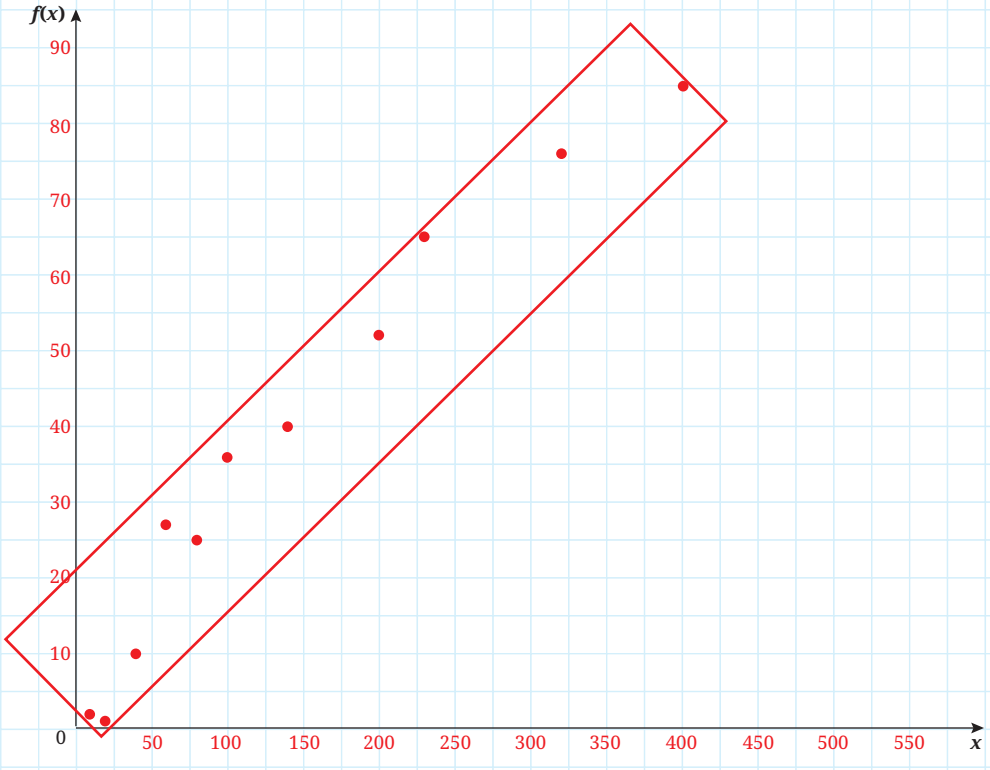
**RÉPONSE**

Le coefficient de corrélation est de $-0{,}26$. La corrélation est donc négative et très faible.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★**2.** Interprétez la valeur du coefficient de corrélation entre les deux variables de cette situation.

| UTILISATION DE LA BATTERIE DE DIFFÉRENTS CELLULAIRES SELON LE TEMPS D'UTILISATION | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TEMPS D'UTILISATION DU CELLULAIRE (min) | 10 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 140 | 200 | 230 | 320 | 400 |
| UTILISATION DE LA BATTERIE (%) | 2 | 1 | 10 | 27 | 25 | 36 | 40 | 52 | 65 | 76 | 85 |




Mesure du grand côté : 116 mm
Mesure du petit côté : 18 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = \left(1 - \frac{18}{116}\right)$$

$$r \approx (1 - 0{,}16)$$

$$r \approx 0{,}84$$

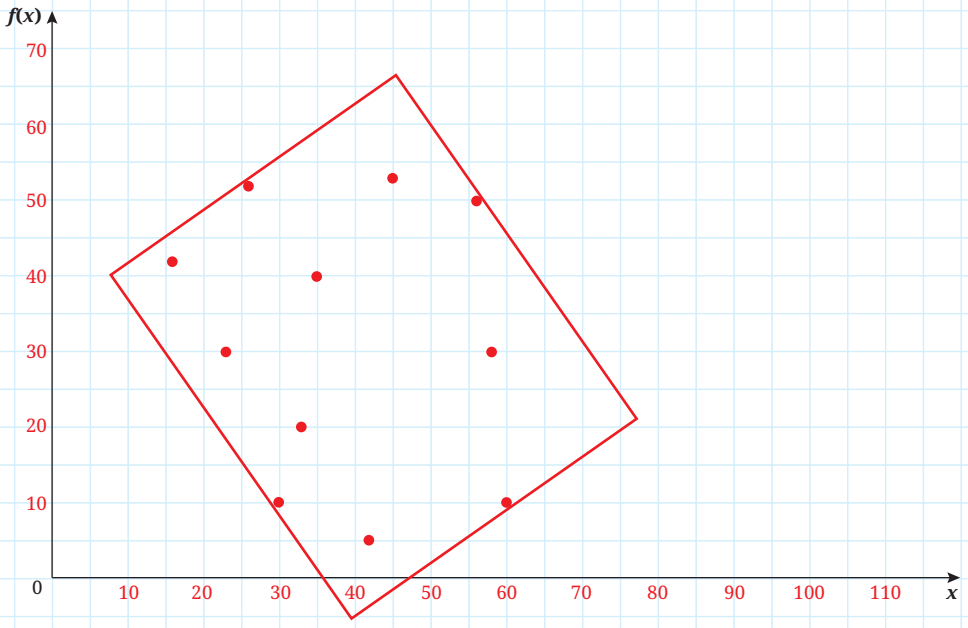
**RÉPONSE** Le coefficient de corrélation est de 0,84. La corrélation est donc forte et positive.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **3.** Robert est à la recherche d'un nouvel emploi. Il décide de postuler auprès d'une entreprise où un de ses amis travaille. Lors de l'entrevue, il doit répondre à un questionnaire comportant 55 questions et obtenir au moins 35 bonnes réponses. À titre indicatif, son ami lui présente les résultats des dernières personnes ayant postulé.

| RÉSULTAT AU QUESTIONNAIRE DES POSTULANTS ET POSTULANTES SELON L'ÂGE | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **ÂGE DU POSTULANT OU DE LA POSTULANTE** | 16 | 23 | 26 | 30 | 33 | 35 | 42 | 45 | 56 | 58 | 60 |
| **NOMBRE DE BONNES RÉPONSES** | 42 | 30 | 52 | 10 | 20 | 40 | 5 | 53 | 50 | 30 | 10 |

Âgé de 56 ans, Robert se dit donc qu'il devrait obtenir 50 bonnes réponses. A-t-il raison de se fier à ces données ? Justifiez votre réponse à l'aide d'arguments mathématiques.




Mesure du grand côté : 55,5 mm
Mesure du petit côté : 46 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = {}^{-}\left(1 - \frac{46}{55{,}5}\right)$$

$$r \approx {}^{-}(1 - 0{,}83)$$

$$r \approx {}^{-}0{,}17$$

**RÉPONSE**

Robert ne devrait pas se fier à ces données. En effet, le coefficient de corrélation est de $^{-}0{,}17$, ce qui veut dire que le lien entre l'âge des postulants et postulantes et le résultat au questionnaire est presque nul (ou toute réponse similaire).

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

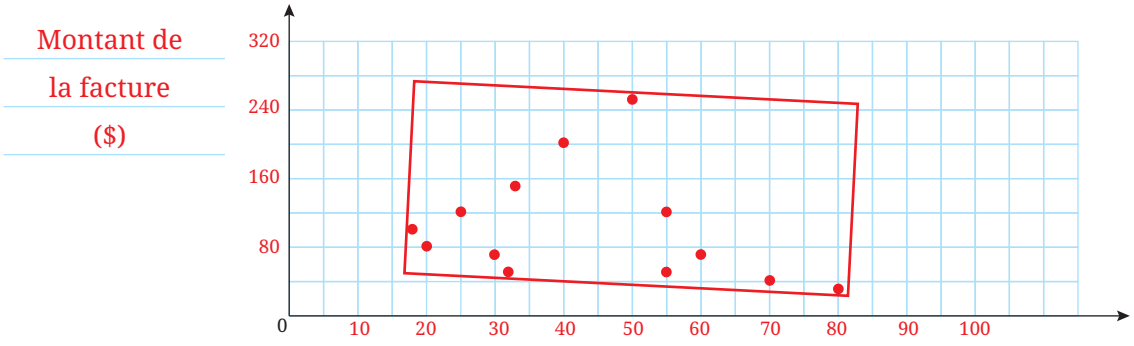
Reproduction autorisée

★★**4.** Luka fait partie d'une école de danse. Afin d'amasser des fonds pour leur prochaine compétition, les membres de son école et lui vont emballer les achats de la clientèle d'un supermarché. Aimant bien analyser les choses, Luka prend des notes sur les dernières personnes ayant défilé à sa caisse. Il a consigné ses notes dans la table de valeurs suivante.

| COLLECTE DE FONDS POUR L'ÉCOLE DE DANSE DE LUKA | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ÂGE DU CLIENT OU DE LA CLIENTE | 18 | 20 | 25 | 30 | 32 | 33 | 40 | 50 | 55 | 55 | 60 | 70 | 80 |
| MONTANT DE LA FACTURE ($) | 100 | 80 | 120 | 70 | 50 | 150 | 200 | 250 | 120 | 50 | 70 | 40 | 30 |
| POURBOIRE LAISSÉ À LUKA ($) | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 | 2 | 2 | 3 | 10 | 5 |

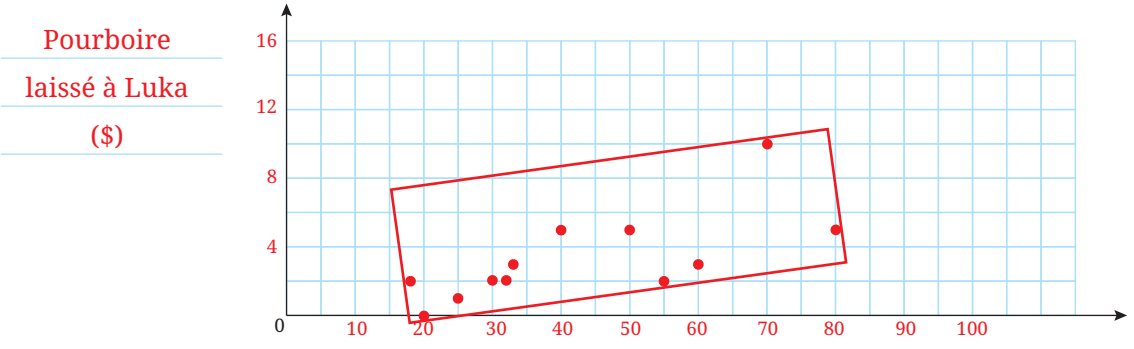
**a** À l'aide d'un nuage de points, représentez le lien entre le montant de la facture et l'âge du client ou de la cliente.

Montant de la facture selon l'âge du client ou de la cliente



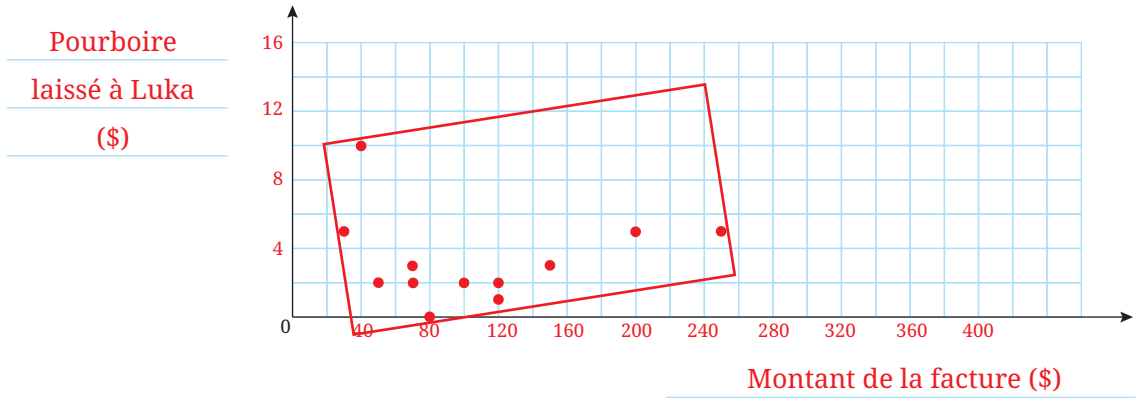

**b** À l'aide d'un nuage de points, représentez le lien entre le pourboire laissé à Luka et l'âge du client ou de la cliente.

Pourboire laissé à Luka en fonction de l'âge du client ou de la cliente



**c** À l'aide d'un nuage de points, représentez le lien entre le pourboire laissé à Luka et le montant de la facture.

Pourboire en fonction du montant de la facture




**d** Calculez le coefficient de corrélation dans chacun des nuages de points précédents.

**1** Relation 1

Mesure du grand côté : 51 mm

Mesure du petit côté : 25,5 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = {}^{-}\left(1 - \frac{48}{78}\right)$

$r \approx {}^{-}(1 - 0{,}62)$

$r \approx {}^{-}0{,}38$

**2** Relation 2

Mesure du grand côté : 119 mm

Mesure du petit côté : 46 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = \left(1 - \frac{46}{119}\right)$

$r \approx (1 - 0{,}39)$

$r \approx 0{,}61$

**3** Relation 3

Mesure du grand côté : 130 mm

Mesure du petit côté : 76 mm

$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$

$r = \left(1 - \frac{76}{130}\right)$

$r \approx (1 - 0{,}58)$

$r \approx 0{,}42$

**RÉPONSE** Le coefficient de corrélation dans la relation 1 est de $^{-}0{,}38$, tandis qu'il est respectivement de 0,61 et de 0,42 dans les relations 2 et 3.

**e** Classez les trois relations en ordre croissant selon l'intensité de leur lien, puis déterminez la relation ayant le lien le plus fort.

En ordre croissant les coefficients sont $^{-}0{,}38$ ; 0,42 ; 0,61. La relation la plus forte est celle entre l'âge de la clientèle et le pourboire laissé à Luka.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# 7.5 LES DROITES DE RÉGRESSION

## Établir l'équation d'une droite de régression avec la méthode de Mayer

En statistique, le but est de pouvoir faire des prédictions qui dépassent les études réalisées. Par exemple, des études sur le climat permettent de prévoir l'augmentation de la température en 2050 ou en 2100. Pour ce faire, les équipes de recherche se fient aux données enregistrées jusqu'à maintenant pour établir des modèles mathématiques. L'un de ces modèles est la droite de régression.

La droite de régression s'écrit sous la forme $y = ax + b$ qui représente le mieux possible la situation. Les résultats obtenus par cette droite demeurent une approximation et ne garantissent pas un résultat exact. Deux méthodes sont utilisées pour trouver la droite de régression : la méthode de Mayer et la méthode médiane-médiane.

Voici d'abord la méthode de Mayer.

**EXEMPLE**

**(60, 40), (67, 30), (55, 40), (58, 45), (70, 32), (50, 50), (60, 42), (58, 47), (62, 35), (72, 25), (65, 37)**

| | |
|---|---|
| **1.** Placer les données en ordre croissant selon la variable indépendante. Si des couples ont la même variable indépendante, les ordonner selon la variable dépendante.<br>* Il ne faut jamais modifier les couples en ordonnant les données. | (50, 50), (55, 40), (58, 45), (58, 47), (60, 40), (60, 42), (62, 35), (65, 37), (67, 30), (70, 32), (72, 25) |
| **2.** Séparer la distribution en deux groupes ayant le même nombre de données. Si la distribution a un nombre impair de données, associer la donnée du centre aux deux groupes. | **Groupe 1**<br>(50, 50), (55, 40), (58, 45), (58, 47), (60, 40), (60, 42)<br>**Groupe 2**<br>(60, 42), (62, 35), (65, 37), (67, 30), (70, 32), (72, 25) |
| **3.** Calculer la moyenne des abscisses et des ordonnées dans chacun des deux groupes pour obtenir les points $P_1$ et $P_2$. | $x_1 = \frac{50 + 55 + 58 + 58 + 60 + 60}{6}$<br>$x_1 = \frac{341}{6}$<br>$x_1 = 58{,}8\overline{3}$<br>$y_1 = \frac{50 + 40 + 45 + 47 + 40 + 42}{6}$<br>$y_1 = \frac{264}{6}$<br>$y_1 = 44$<br>$P_1(58{,}8\overline{3}\,;\, 44)$<br><br>$x_2 = \frac{60 + 62 + 65 + 67 + 70 + 72}{6}$<br>$x_2 = \frac{396}{6}$<br>$x_2 = 66$<br>$y_2 = \frac{42 + 35 + 37 + 30 + 32 + 25}{6}$<br>$y_2 = \frac{201}{6}$<br>$y_2 = 33{,}5$<br>$P_2(66\,;\, 33{,}5)$ |

**4.** Déterminer l'équation de la droite passant par les points $P_1$ et $P_2$.

* Il est à noter que contrairement à une vraie fonction affine, la valeur de $b$ varie selon le point utilisé.

$P_1(58{,}8\overline{3}\,;\,44)$ et $P_2(66\,;\,33{,}5)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{33{,}5 - 44}{66 - 58{,}83}$$

$$a = \frac{-10{,}5}{7{,}17}$$

$$a \approx -1{,}46$$

$y = -1{,}46x + b$
$33{,}5 = -1{,}46(66) + b$
$33{,}5 = -96{,}36 + b$
$129{,}86 \approx b$
$y = -1{,}46x + 129{,}86$

ou

$y = -1{,}46x + b$
$44 = -1{,}46(58{,}83) + b$
$44 = -85{,}89 + b$
$129{,}89 \approx b$
$y = -1{,}46x + 129{,}89$

## EXERCICES

* Note à l'enseignant ou l'enseignante : Dans les exercices de cette section du chapitre, quand il est question d'établir l'équation de la droite de régression avec la méthode de Mayer, deux équations sont possibles selon le couple choisi pour trouver l'ordonnée à l'origine. Ce corrigé présente une seule solution dans chacun de ces cas.

★**1.** Kareen a calculé que la droite de régression d'une situation était $y = -2x + 41$, selon les points $P_1(8, 25)$ et $P_2(15, 11)$ qu'elle a trouvés. A-t-elle raison ?

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{11 - 25}{15 - 8}$$

$$a = -2$$

$y = -2x + b$
$25 = -2(8) + b$
$25 = -16 + b$
$41 = b$

**RÉPONSE** Kareen a raison. L'équation de la droite de régression est $y = 1{,}04x + 1{,}86$.

★**2.** Quel est le taux de variation de la droite de régression d'une distribution dont le premier groupe est composé des données (8, 12) et (10, 14) et dont le second groupe est composé des données (15, 20) et (19, 26) ?

$$x_1 = \frac{8 + 10}{2} = 9$$

$$y_1 = \frac{12 + 14}{2} = 13$$

$P_1(9, 13)$

$$x_2 = \frac{15 + 19}{2} = 17$$

$$y_2 = \frac{20 + 26}{2} = 23$$

$P_2(17, 23)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{23 - 13}{17 - 9}$$

$$a = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \text{ ou } 1{,}25$$

**RÉPONSE** Le taux de variation est de $\frac{5}{4}$ ou 1,25.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★3. Pour chacune des situations suivantes, déterminez l'équation de la droite de régression à l'aide de la méthode de Mayer.

**a** (150, 280), (110, 200), (230, 375), (200, 280), (100, 150), (180, 300), (350, 400), (50, 100), (150, 230), (200, 250), (300, 350)

**1** (50, 100), (100, 150), (110, 200), (150, 230), (150, 280), (180, 300), (200, 250), (200, 280), (230, 375), (300, 350), (350, 400)

**2** Groupe 1 : (50, 100), (100, 150), (110, 200), (150, 230), (150, 280), (180, 300)
Groupe 2 : (180, 300), (200, 250), (200, 280), (230, 375), (300, 350), (350, 400)

**3** $x_1 = \dfrac{50 + 100 + 110 + 150 + 150 + 180}{6}$

$x_1 = \dfrac{740}{6}$

$x_1 = 123,\overline{3}$

$y_1 = \dfrac{100 + 150 + 200 + 230 + 280 + 300}{6}$

$y_1 = \dfrac{1260}{6}$

$y_1 = 210$

$P_1(123,\overline{3};\ 210)$

$x_2 = \dfrac{180 + 200 + 200 + 230 + 300 + 350}{6}$

$x_2 = \dfrac{1460}{6}$

$x_2 = 243,\overline{3}$

$y_2 = \dfrac{300 + 250 + 280 + 375 + 350 + 400}{6}$

$y_2 = \dfrac{1955}{6}$

$y_2 = 325,8\overline{3}$

$P_2(243,\overline{3};\ 325,8\overline{3})$

**4** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{325,83 - 210}{243,33 - 123,33}$

$a = \dfrac{115,83}{120}$

$a \approx 0,97$

$y = 0,97x + b$

$210 = 0,97(123,33) + b$

$210 = 119,63 + b$

$90,37 \approx b$

$y = 0,97x + 90,37$

**RÉPONSE** L'équation de la droite de régression est $y = 0,97x + 90,37$.

**b** $(^{-}10, 30), (0, 40), (^{-}5, 35), (^{-}2, 50), (3, 40), (^{-}15, 30), (7, 50), (2, 45), (^{-}1, 30)$

**1** $(^{-}15, 30), (^{-}10, 30), (^{-}5, 35), (^{-}2, 50), (^{-}1, 30), (0, 40), (2, 45), (3, 40), (7, 50)$

**2** Groupe 1 : $(^{-}15, 30), (^{-}10, 30), (^{-}5, 35), (^{-}2, 50), (^{-}1, 30)$
Groupe 2 : $(^{-}1, 30), (0, 40), (2, 45), (3, 40), (7, 50)$

**3** $x_1 = \dfrac{^{-}15 + ^{-}10 + ^{-}5 + ^{-}2 + ^{-}1}{5}$

$x_1 = \dfrac{^{-}33}{5}$

$x_1 = ^{-}6{,}6$

$y_1 = \dfrac{30 + 30 + 35 + 50 + 30}{5}$

$y_1 = \dfrac{175}{5}$

$y_1 = 35$

$P_1(^{-}6{,}6 ; 35)$

$x_2 = \dfrac{^{-}1 + 0 + 2 + 3 + 7}{5}$

$x_2 = \dfrac{11}{5}$

$x_2 = 2{,}2$

$y_2 = \dfrac{30 + 40 + 45 + 40 + 50}{5}$

$y_2 = \dfrac{205}{5}$

$y_2 = 41$

$P_2 (2{,}2 ; 41)$

**4** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{41 - 35}{2{,}2 - ^{-}6{,}6}$

$a = \dfrac{6}{8{,}8}$

$a \approx 0{,}68$

$35 = 0{,}68 \cdot (^{-}6{,}6) + b$

$35 = ^{-}4{,}49 + b$

$39{,}49 = b$

$y = 0{,}68x + 39{,}49$

**RÉPONSE** L'équation de la droite de régression est $y = 0{,}68x + 39{,}49$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## Établir l'équation d'une droite de régression à l'aide de la méthode médiane-médiane

La seconde méthode permettant de trouver la règle de la droite de régression est la méthode médiane-médiane.

**EXEMPLE**

**(60, 40), (67, 30), (55, 40), (58, 45), (70, 32), (50, 50), (60, 42), (58, 47), (62, 35), (72, 25), (65, 37)**

| | |
|---|---|
| **1.** Placer les données en ordre croissant selon la variable indépendante. Si des couples ont la même variable indépendante, les ordonner selon la variable dépendante.<br>* Il ne faut jamais modifier les couples en ordonnant les données. | (50, 50), (55, 40), (58, 45), (58, 47), (60, 40), (60, 42), (62, 35), (65, 37), (67, 30), (70, 32), (72, 25) |
| **2.** Séparer la distribution en trois groupes ayant le même nombre de données. Si la distribution ne peut pas être séparée en trois, s'assurer que le premier et le troisième groupe ont le même nombre de données.<br>Dans ce cas, le deuxième groupe doit avoir **une donnée de plus ou de moins** que les deux autres groupes. | Il y a 11 données, donc les groupes comprendront 4, 3 et 4 données.<br>**Groupe 1**<br>(50, 50), (55, 40), (58, 45), (58, 47)<br>**Groupe 2**<br>(60, 40), (60, 42), (62, 35)<br>**Groupe 3**<br>(65, 37), (67, 30), (70, 32), (72, 25) |
| **3.** Calculer la médiane de chacun des groupes pour obtenir les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$. | $M_1\left(\frac{55+58}{2}, \frac{40+45}{2}\right)$, donc $M_1(56{,}5\,;\,42{,}5)$<br>$M_2(60, 42)$<br>$M_3\left(\frac{67+70}{2}, \frac{30+32}{2}\right)$, donc $M_3(68{,}5\,;\,31)$ |
| **4.** Déterminer le point P dont les coordonnées seront la moyenne des trois points trouvés à l'étape 3. | $P\left(\frac{56{,}5+60+68{,}5}{3}, \frac{42{,}5+42+31}{3}\right)$,<br>donc $P(61{,}\overline{6}\,;\,38{,}5)$ |
| **5.** Calculer le taux de variation $a$ de la droite à l'aide des points $M_1$ et $M_3$. | $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$<br>$a = \frac{31 - 42{,}5}{68{,}5 - 56{,}5}$<br>$a = \frac{-11{,}5}{12}$<br>$a \approx -0{,}96$ |
| **6.** Déterminer la valeur de l'ordonnée à l'origine $b$ à l'aide du point P. | $y = -0{,}96x + b$<br>$38{,}5 = -0{,}96(61{,}67) + b$<br>$38{,}5 \approx -59{,}20 + b$<br>$-97{,}7 \approx b$<br>$y = 0{,}96x + 97{,}7$ |

# EXERCICES

★**1.** Pour chacune des situations suivantes, déterminez l'équation de la droite de régression à l'aide de la méthode médiane-médiane.

**a** (170, 380), (120, 230), (260, 315), (100, 230), (70, 15), (280, 340), (250, 300), (450, 600), (250, 430), (220, 280), (330, 390)

**1** (70, 15), (100, 230), (120, 230), (170, 380), (220, 280), (250, 300), (250, 430), (260, 315), (280, 340), (330, 390), (450, 600)

**2** Groupe 1 : (70, 15), (100, 230), (120, 230), (170, 380)
Groupe 2 : (220, 280), (250, 300), (250, 430)
Groupe 3 : (260, 315), (280, 340), (330, 390), (450, 600)

**3** $M_1\left(\frac{100 + 120}{2}, \frac{230 + 230}{2}\right)$, donc $M_1(110, 230)$
$M_2(250, 300)$
$M_3\left(\frac{280 + 330}{2}, \frac{340 + 390}{2}\right)$, donc $M_3(305, 365)$

**4** $P\left(\frac{110 + 250 + 305}{3}, \frac{230 + 300 + 365}{3}\right)$, donc $P(221,\overline{6}; 298,\overline{3})$

**5** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{365 - 230}{305 - 110}$

$a = \frac{135}{195}$

$a \approx 0{,}69$

$y = 0{,}69x + b$

$298{,}33 = 0{,}69(221{,}67) + b$

$298{,}33 = 152{,}95 + b$

$145{,}38 \approx b$

$y = 0{,}69x + 145{,}38$

**RÉPONSE** L'équation de la droite de régression est $y = 0{,}69x + 145{,}38$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**b** $(^{-}5, 20), (2, 30), (^{-}10, 40), (^{-}7, 32), (6, 15), (^{-}30, 90), (12, ^{-}2), (1, 20), (^{-}4, 28), (0, 15)$

**1** $(^{-}30, 90), (^{-}10, 40), (^{-}7, 32), (^{-}5, 20), (^{-}4, 28), (0, 15), (1, 20), (2, 30), (6, 15), (12, ^{-}2)$

**2** Groupe 1 : $(^{-}30, 90), (^{-}10, 40), (^{-}7, 32)$
Groupe 2 : $(^{-}5, 20), (^{-}4, 28), (0, 15), (1, 20)$
Groupe 3 : $(2, 30), (6, 15), (12, ^{-}2)$

**3** $M_1(^{-}10, 40)$

$M_2\left(\frac{^{-}4 + 0}{2}, \frac{28 + 15}{2}\right)$, donc $M_2(^{-}2\,;\,21{,}5)$

$M_3\,(6, 15)$

**4** $P\left(\frac{^{-}10 + ^{-}2 + 6}{3}, \frac{40 + 21{,}5 + 15}{3}\right)$, donc $P(^{-}2\,;\,25{,}5)$

**5** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{15 - 40}{6 - ^{-}10}$

$a = \frac{^{-}25}{16}$

$a \approx ^{-}1{,}56$

$y = ^{-}1{,}56x + b$

$25{,}5 = ^{-}1{,}56(^{-}2) + b$

$25{,}5 = 3{,}12 + b$

$22{,}38 \approx b$

$y = ^{-}1{,}56x + 22{,}38$

**RÉPONSE** L'équation de la droite de régression est $y = ^{-}1{,}56x + 22{,}38$.

★★ **2.** À l'aide de la méthode de Mayer et de la méthode médiane-médiane, déterminez l'équation de la droite de régression représentant la situation ci-dessous.
Que constatez-vous ? Expliquez pourquoi, selon vous, vous arrivez à ce résultat.

**(12, 55), (26, 42), (0, 47), (10, 120), (33, 54), (23, 43), (12, 25), (3, 26), (45, 0), (36, 7), (8, 73), (28, 18), (57, ⁻16), (48, ⁻5)**

**1** Méthode de Mayer

(0, 47), (3, 26), (8, 73), (10, 120), (12, 25), (12, 55), (23, 43), (26, 42), (28, 18), (33, 54), (36, 7), (45, 0), (48, ⁻5), (57, ⁻16)

Groupe 1 : (0, 47), (3, 26), (8, 73), (10, 120), (12, 25), (12, 55), (23, 43)

Groupe 2 : (26, 42), (28, 18), (33, 54), (36, 7), (45, 0), (48, ⁻5), (57, ⁻16)

$x_1 = \dfrac{0 + 3 + 8 + 10 + 12 + 12 + 23}{7}$

$x_1 = \dfrac{68}{7}$

$x_1 \approx 9{,}71$

$y_1 = \dfrac{47 + 26 + 73 + 120 + 25 + 55 + 43}{7}$

$y_1 = \dfrac{389}{7}$

$x_1 \approx 55{,}57$

$P_1(9{,}71 ; 55{,}57)$

$x_2 = \dfrac{26 + 28 + 33 + 36 + 45 + 48 + 57}{7}$

$x_2 = \dfrac{273}{7}$

$x_2 = 39$

$y_2 = \dfrac{42 + 18 + 54 + 7 + 0 + {}^{-}5 + {}^{-}16}{7}$

$y_2 = \dfrac{100}{7}$

$y_2 \approx 14{,}29$

$P_2(39 ; 14{,}29)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{14{,}29 - 55{,}57}{39 - 9{,}71}$

$a = \dfrac{{}^{-}41{,}28}{29{,}29}$

$a \approx {}^{-}1{,}41$

$y = {}^{-}1{,}41x + b$

$55{,}57 = {}^{-}1{,}41(9{,}71) + b$

$55{,}57 = {}^{-}13{,}69 + b$

$69{,}26 \approx b$

$y = {}^{-}1{,}41x + 41{,}88$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**2** Méthode médiane-médiane

Groupe 1 : (0, 47), (3, 26), (8, 73), (10, 120), (12, 25)

Groupe 2 : (12, 55), (23, 43), (26, 42), (28, 18)

Groupe 3 : (33, 54), (36, 7), (45, 0), (48, $^{-}$5), (57, $^{-}$16)

$M_1(8, 47)$

$M_2\left(\frac{23 + 26}{2}, \frac{43 + 42}{2}\right)$, donc $M_2(24{,}5\,;\, 42{,}5)$

$M_3(45\,;\, 0)$

$P\left(\frac{8 + 24{,}5 + 45}{3}, \frac{73 + 42{,}5 + 0}{3}\right)$, donc $P(25{,}8\overline{3}\,;\, 38{,}5)$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{0 - 47}{45 - 8}$$

$$a = \frac{^{-}47}{37}$$

$$a \approx {}^{-}1{,}27$$

$$y = {}^{-}1{,}27x + b$$

$$38{,}5 = {}^{-}1{,}27(25{,}83) + b$$

$$38{,}5 = {}^{-}32{,}80 + b$$

$$71{,}30 \approx b$$

$$y = {}^{-}1{,}27x + 71{,}30$$

**3** Comparaison

$y = {}^{-}1{,}41x + 41{,}88$ et $y = {}^{-}1{,}27x + 71{,}30$

**RÉPONSE**

Je remarque que les deux règles ne sont pas identiques. C'est normal puisque les méthodes pour obtenir les règles ne sont pas les mêmes. De plus, ces méthodes servent à faire des prévisions, si la tendance se maintient (ou toute réponse similaire).

## Résoudre des problèmes avec la droite de régression

Le but premier de la droite de régression est de permettre d'effectuer des prédictions. Ainsi, une fois établie, la règle de la droite peut servir à trouver une nouvelle valeur.

Pour ce faire, on établit d'abord la règle de la droite à l'aide d'une des deux méthodes présentées précédemment et on l'utilise ensuite pour trouver la donnée recherchée.

**EXEMPLE**

Les données suivantes représentent les notes d'élèves en mathématique en fonction de leur note en français.

**(67, 58), (75, 72), (55, 62), (70, 82), (90, 70), (68, 65), (78, 75), (88, 83), (80, 82), (87, 84), (92, 90), (95, 88), (50, 45).**

Quelle devrait être la note en français d'un élève ayant obtenu 79 % en mathématique ?

**1.** Trouver la règle de la droite de régression à l'aide de la méthode de son choix (ici avec la méthode de Mayer).

**1)** (50, 45), (55, 62), (67, 58), (68, 65), (70, 82), (75, 72), (78, 75), (80, 82), (87, 84), (88, 83), (90, 70), (92, 90), (95, 88)

**2)** **Groupe 1 :** (50, 45), (55, 62), (67, 58), (68, 65), (70, 82), (75, 72), (78, 75)

**Groupe 2 :** (78, 75), (80, 82), (87, 84), (88, 83), (90, 70), (92, 90), (95, 88)

**3)**
$$x_1 = \frac{50 + 55 + 67 + 68 + 70 + 75 + 78}{7} = \frac{463}{7}$$
$$x_1 \approx 66{,}14$$
$$y_1 = \frac{45 + 62 + 58 + 65 + 82 + 72 + 75}{7} = \frac{459}{7}$$
$$y_1 \approx 65{,}57$$
$$P_1(66{,}14\,;\,65{,}57)$$
$$x_2 = \frac{78 + 80 + 87 + 88 + 90 + 92 + 95}{7} = \frac{610}{7}$$
$$x_2 \approx 87{,}14$$
$$y_2 = \frac{75 + 82 + 84 + 83 + 70 + 90 + 88}{7} = \frac{572}{7}$$
$$y_2 \approx 81{,}71$$
$$P_2(87{,}14\,;\,81{,}71)$$

**4)**
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{81{,}71 - 65{,}57}{87{,}14 - 66{,}14}$$
$$a = \frac{16{,}14}{21}$$
$$a \approx 0{,}77$$

$$y = 0{,}77x + b$$
$$65{,}57 = 0{,}77(66{,}14) + b$$
$$65{,}57 = 50{,}93 + b$$
$$14{,}64 \approx b$$

$$y = 0{,}77x + 14{,}64$$

**2.** Se servir de la règle et des informations fournies dans la question pour trouver la donnée recherchée.

Quelle est la note en français d'un élève ayant obtenu 79 % en mathématique ?

Un élève ayant obtenu 79 % en mathématique devrait avoir eu 83,58 % en français.

$$y = 0{,}77x + 14{,}64$$
$$79 = 0{,}77x + 14{,}64$$
$$64{,}36 = 0{,}77x$$
$$83{,}58\,\% \approx x$$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

# EXERCICES

★★1. Alessandra est une vendeuse pour un concessionnaire automobile. Dernièrement, elle a effectué un petit sondage auprès de ses collègues. Elle a compilé les résultats dans la table des valeurs suivante.

| MONTANT DES VENTES SELON LE NOMBRE DE PERSONNES RENCONTRÉES EN UNE SEMAINE | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NOMBRE DE PERSONNES RENCONTRÉES | 2 | 2 | 6 | 8 | 10 | 15 | 19 | 22 | 26 |
| MONTANT DES VENTES ($) | 35 500 | 18 500 | 32 800 | 46 700 | 76 235 | 65 489 | 125 623 | 165 000 | 234 500 |

La semaine prochaine, Alessandra a déjà 12 rendez-vous de prévus. Calculez le montant des ventes qu'elle peut espérer faire avec ces rendez-vous.

**1** (2, 18 500), (2, 35 500), (6, 32 800), (8, 46 700), (10, 76 235), (15, 65 489), (19, 125 623), (22, 165 000), (26, 234 500)

**2** Groupe 1 : (2, 18 500), (2, 35 500), (6, 32 800), (8, 46 700), (10, 76 235)
Groupe 2 : (10, 76 235), (15, 65 489), (19, 125 623), (22, 165 000), (26, 234 500)

**3** $x_1 = \frac{2 + 2 + 6 + 8 + 10}{5}$

$x_1 = \frac{28}{5}$

$x_1 = 5{,}6$

$y_1 = \frac{18\,500 + 35\,500 + 32\,800 + 46\,700 + 76\,235}{5}$

$y_1 = \frac{209\,735}{5}$

$y_1 = 41\,947$

$P_1(5{,}6\,;\,41\,947)$

$x_2 = \frac{10 + 15 + 19 + 22 + 26}{5}$

$x_2 = \frac{92}{5}$

$x_2 = 18{,}4$

$y_2 = \frac{76\,235 + 65\,489 + 125\,623 + 165\,000 + 234\,500}{5}$

$y_2 = \frac{666\,847}{5}$

$y_2 = 133\,369{,}4$

$P_2(18{,}4\,;\,133\,369{,}4)$

**4** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{133\,369{,}4 - 41\,947}{18{,}4 - 5{,}6}$

$a = \frac{91\,422{,}4}{12{,}8}$

$a \approx 7142{,}38$

$y = 7142{,}38x + b$

$41\,947 = 7142{,}38(5{,}6) + b$

$41\,947 = 39\,997{,}33 + b$

$1949{,}67 \approx b$

$y = 7142{,}38x + 1949{,}67$

**5** Montant des ventes avec 12 rendez-vous

$y = 7142{,}38(12) + 1949{,}67$

$y = 85\,708{,}56 + 1949{,}67$

$y = 87\,658{,}23$

**RÉPONSE** Alessandra peut espérer faire des ventes de 87 658,23 $ avec les 12 rendez-vous.

**2.** En politique, les partis effectuent beaucoup de sondages afin d'établir certaines stratégies en vue des élections. Le Parti canadien a dernièrement fait une étude afin de savoir quel groupe d'âge de la population sera le plus susceptible de voter pour lui lors des prochaines élections. Les couples suivants représentent la probabilité, en pourcentage, de la personne à voter pour le Parti canadien en fonction de l'âge.

**(48, 35), (70, 25), (20, 80), (35, 60), (40, 50), (75, 20), (31, 63), (19, 70), (49, 40), (44, 60), (76, 25), (66, 15), (68, 24), (51, 20), (58, 15), (22, 75), (25, 60), (18, 85), (30, 68), (41, 59), (55, 48)**

Les analystes considèrent qu'à partir de 65 % de probabilité, une personne votera pour ce parti. Quel groupe d'âge sera le plus susceptible de voter pour le Parti canadien aux prochaines élections ?

**1** (18, 85), (19, 70), (20, 80), (22, 75), (25, 60), (30, 68), (31, 63), (35, 60), (40, 50), (41, 59), (44, 60), (48, 35), (49, 40), (51, 20), (55, 48), (58, 15), (66, 15), (68, 24), (70, 25), (75, 20), (76, 25)

**2** Groupe 1 : (18, 85), (19, 70), (20, 80), (22, 75), (25, 60), (30, 68), (31, 63), (35, 60), (40, 50), (41, 59), (44, 60)
Groupe 2 : (44, 60), (48, 35), (49, 40), (51, 20), (55, 48), (58, 15), (66, 15), (68, 24), (70, 25), (75, 20), (76, 25)

**3** $x_1 = \dfrac{18 + 19 + 20 + 22 + 25 + 30 + 31 + 35 + 40 + 41 + 44}{11}$

$x_1 = \dfrac{325}{11}$

$x_1 = 29,\overline{54}$

$y_1 = \dfrac{85 + 70 + 80 + 75 + 60 + 68 + 63 + 60 + 50 + 59 + 60}{11}$

$y_1 = \dfrac{730}{11}$

$y_1 = 66,\overline{36}$

$P_1(29,55 ; 66,36)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

$$x_2 = \frac{44 + 48 + 49 + 51 + 55 + 58 + 66 + 68 + 70 + 75 + 76}{11}$$

$$x_2 = \frac{660}{11}$$

$$x_2 = 60$$

$$y_2 = \frac{60 + 35 + 40 + 20 + 48 + 15 + 15 + 24 + 25 + 20 + 25}{11}$$

$$y_2 = \frac{327}{11}$$

$$y_2 = 29,\overline{72}$$

$$P_2(60\,;\,29,73)$$

**4** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$a = \frac{29,73 - 66,36}{60 - 29,55}$$

$$a = \frac{^-36,63}{30,45}$$

$$a \approx {}^-1,20$$

$$y = {}^-1,20x + b$$

$$66,36 = {}^-1,20(29,55) + b$$

$$66,36 = {}^-35,46 + b$$

$$101,82 \approx b$$

$$y = {}^-1,20x + 101,82$$

**5** Âge dont la probabilité est de 65 %

$$y = {}^-1,20x + 101,82$$

$$65 = {}^-1,20x + 101,82$$

$$^-36,82 = {}^-1,20x$$

$$30,68 \text{ ans} \approx x$$

**RÉPONSE**

Comme la probabilité diminue en fonction de l'âge, le groupe d'âge ayant le plus de chance de voter pour le Parti canadien est celui des 18-30 ans.

★★ **3.** Depuis quelques années, les astrophysiciens et astrophysiciennes découvrent de plus en plus d'exoplanètes, soit des planètes situées à l'extérieur de notre système solaire. Leur recherche porte sur des exoplanètes qui seraient habitables pour les êtres humains. Pour être considérée comme telle, une planète doit être située dans la zone habitable de son étoile, soit celle où la température permet à l'eau d'être sous forme liquide.

Des scientifiques ont tenté d'établir un lien entre le nombre de planètes d'un système solaire et le nombre de planètes se situant dans la zone habitable de l'étoile. Voici les derniers systèmes découverts.

**(8, 1), (12, 3), (4, 0), (5, 1), (14, 5), (9, 2), (10, 3), (18, 4), (6, 0), (7, 2), (10, 4), (12, 1), (14, 3), (17, 3), (16, 5), (3, 1), (5, 0)**

Aujourd'hui, un astrophysicien a découvert un système planétaire comportant 16 planètes. Combien de planètes devraient se situer dans la zone habitable ?

**1** (3, 1), (4, 0), (5, 0), (5, 1), (6, 0), (7, 2), (8, 1), (9, 2), (10, 3), (10, 4), (12, 1), (12, 3), (14, 3), (14, 5), (16, 5), (17, 3), (18, 4)

**2** Groupe 1 : (3, 1), (4, 0), (5, 0), (5, 1), (6, 0), (7, 2), (8, 1), (9, 2), (10, 3)
Groupe 2 : (10, 3), (10, 4), (12, 1), (12, 3), (14, 3), (14, 5), (16, 5), (17, 3), (18, 4)

**3** $x_1 = \dfrac{3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}{9}$

$x_1 = \dfrac{57}{9}$

$x_1 = 6,\overline{3}$

$y_1 = \dfrac{1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 2 + 1 + 2 + 3}{9}$

$y_1 = \dfrac{10}{9}$

$y_1 = 1,\overline{1}$

$P_1(6,33 ; 1,11)$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

$$x_2 = \frac{10 + 10 + 12 + 12 + 14 + 14 + 16 + 17 + 18}{9}$$

$$x_2 = \frac{123}{9}$$

$$x_2 = 13,\overline{6}$$

$$y_2 = \frac{3 + 4 + 1 + 3 + 3 + 5 + 5 + 3 + 4}{9}$$

$$y_2 = \frac{31}{9}$$

$$y_2 = 3,\overline{4}$$

$P_2(13,67\,;\,3,44)$

**4** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$a = \frac{3,44 - 1,11}{13,67 - 6,33}$$

$$a = \frac{2,33}{7,34}$$

$$a \approx 0,32$$

$$y = 0,32x + b$$

$$1,11 = 0,32(6,33) + b$$

$$1,11 = 2,03 + b$$

$$-0,92 \approx b$$

$$y = 0,32x - 0,92$$

**5** Nombre de planètes habitables dans un système de 16 planètes

$$y = 0,32x - 0,92$$

$$y = 0,32(16) - 0,92$$

$$y = 5,12 - 0,92$$

$y \approx 4,2$ planètes, donc 4 planètes

**RÉPONSE** Dans le nouveau système de 16 planètes, 4 planètes devraient se situer dans la zone habitable.

# CONSOLIDATION DU CHAPITRE 7

## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

★**1.** Qualifiez la corrélation entre les données représentées dans le tableau à double entrée suivant.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 12 | 10 | 5 | 3 | 4 | 5 | 39 |
| **2** | 10 | 9 | 7 | 9 | 10 | 7 | 52 |
| **3** | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 12 | 65 |
| **4** | 3 | 1 | 2 | 5 | 7 | 15 | 33 |
| **TOTAL** | 33 | 29 | 24 | 29 | 35 | 39 | 189 |

**a** Faible et négative

**b** Forte et négative

**c** Faible et positive

**d** Forte et positive

★**2.** Quel est le rang centile de la donnée 82 dans la distribution ci-dessous ?

16, 16, 16, 18, 19, … , 65, 66, 67, 67, 67, … , 81, 82, 82, 82, 84, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 95, 96, 98

**67 données** **39 données**

**a** 91,15 **b** 117 **c** 120 **d** 92

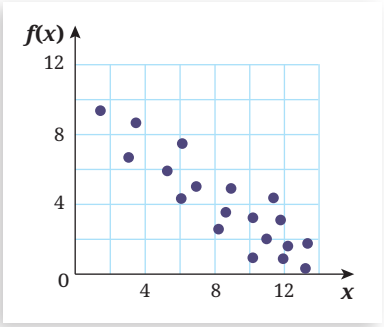
**CALCULS**

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

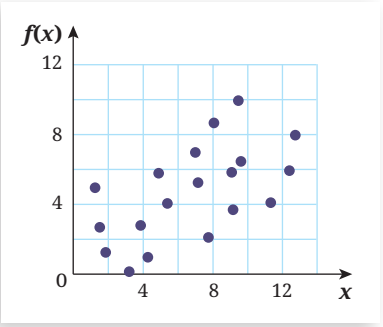
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★3. Classez les nuages de points suivants en ordre croissant selon l'intensité de leur corrélation.

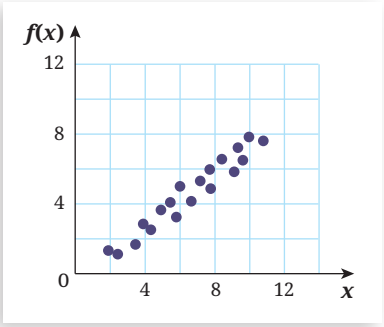
1)



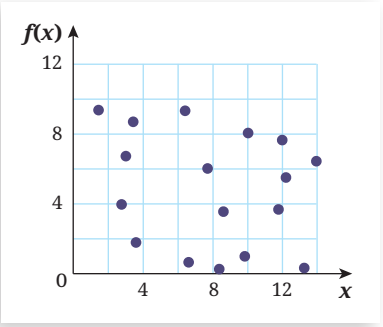

3)




2)




4)




**a** 4, 1, 3, 2 **b** 4, 3, 1, 2 **c** 2, 1, 3, 4 **d** 4, 3, 2, 1

★4. Quel est l'écart moyen de la distribution ci-dessous ?

**12, 16, 8, 7, 18, 20, 21, 6, 0**

**a** 12 **b** 5,25 **c** 6,17 **d** 6

## CALCULS

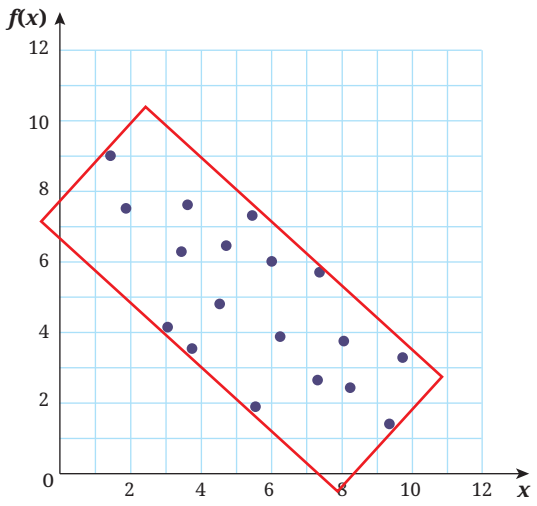
# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★**5.** Représentez la distribution suivante à l'aide d'un diagramme à tige et à feuilles.

**134, 118, 94, 89, 110, 100, 94, 119, 123, 122, 118, 116, 114, 98, 99, 101, 110, 125, 132, 88, 90, 111, 123, 132, 133, 126, 128, 118, 95**

| | |
|---|---|
| 8 | 8, 9 |
| 9 | 0, 4, 4, 5, 8, 9 |
| 10 | 0, 1 |
| 11 | 0, 0, 1, 4, 6, 8, 8, 8, 9 |
| 12 | 2, 3, 3, 5, 6, 8 |
| 13 | 2, 2, 3, 4 |

★★**6.** Quel est le coefficient de corrélation du nuage de points suivant ?




Mesure du grand côté : 53 mm
Mesure du petit côté : 20,5 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = -\left(1 - \frac{20{,}5}{53}\right)$$

$$r \approx -(1 - 0{,}39)$$

$$r \approx -0{,}61$$

**RÉPONSE** Le coefficient de corrélation est de $-0{,}61$.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

★★**7.** Quelle donnée a un rang centile de 41 dans la distribution suivante ?

**25, 25, 25, 27, 30, 31, 31, 40, 40, 43, 47, 47, 49, 52, 52, 60, 60, 60, 60, 72, 72, 72, 73, 74, 74, 75, 76, 79, 80, 80, 82, 82, 82, 84, 85, 86, 86, 88, 90**

**1** Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot$ Nombre total de données

Nombre de données inférieures ou égales $= \frac{41}{100} \cdot 39$

Nombre de données inférieures ou égales $= 15{,}99$

Nombre de données inférieures ou égales $= 15$

**2** La 15e donnée est 52.

**RÉPONSE** La donnée ayant un rang centile de 41 est 52.

★★**8.** Déterminez l'équation de la droite de régression représentant la distribution suivante.

**(18, ⁻40), (0, ⁻20), (15, ⁻25), (⁻10, 10), (5, ⁻25), (20, ⁻45), (⁻5, ⁻10), (0, ⁻15), (10, ⁻30), (7, ⁻25), (⁻4, ⁻15)**

**1** (⁻10, 10), (⁻5, ⁻10), (⁻4, ⁻15), (0, ⁻20), (0, ⁻15), (5, ⁻25), (7, ⁻25), (10, ⁻30), (15, ⁻25), (18, ⁻40), (20, ⁻45)

**2** Groupe 1 : (⁻10, 10), (⁻5, ⁻10), (⁻4, ⁻15), (0, ⁻20), (0, ⁻15), (5, ⁻25)

Groupe 2 : (5, ⁻25), (7, ⁻25), (10, ⁻30), (15, ⁻25), (18, ⁻40), (20, ⁻45)

**3** $x_1 = \frac{⁻10 + ⁻5 + ⁻4 + 0 + 0 + 5}{6}$

$x_1 = \frac{⁻14}{6}$

$x_1 = ⁻2{,}\overline{3}$

$y_1 = \frac{10 + ⁻10 + ⁻15 + ⁻20 + ⁻15 + ⁻25}{6}$

$y_1 = \frac{⁻75}{6}$

$y_1 = ⁻12{,}5$

$P_1(⁻2{,}33 ; ⁻12{,}5)$

$x_2 = \frac{5 + 7 + 10 + 15 + 18 + 20}{6}$

$x_2 = \frac{75}{6}$

$x_2 = 12{,}5$

$y_2 = \frac{⁻25 + ⁻25 + ⁻30 + ⁻25 + ⁻40 + ⁻45}{6}$

$y_2 = \frac{⁻190}{6}$

$y_2 = ⁻31{,}\overline{6}$

$P_2(12{,}5 ; ⁻31{,}67)$

**4** $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \frac{⁻31{,}67 - ⁻12{,}5}{12{,}5 - ⁻2{,}33}$

$a = \frac{⁻19{,}17}{14{,}83}$

$a \approx ⁻1{,}29$

$y = ⁻1{,}29x + b$

$⁻12{,}5 = ⁻1{,}29(⁻2{,}33) + b$

$⁻12{,}5 = 3{,}01 + b$

$⁻15{,}51 \approx b$

$y = ⁻1{,}29x - 15{,}51$

**RÉPONSE** L'équation de la droite de régression est $y = ⁻1{,}29x - 15{,}51$.

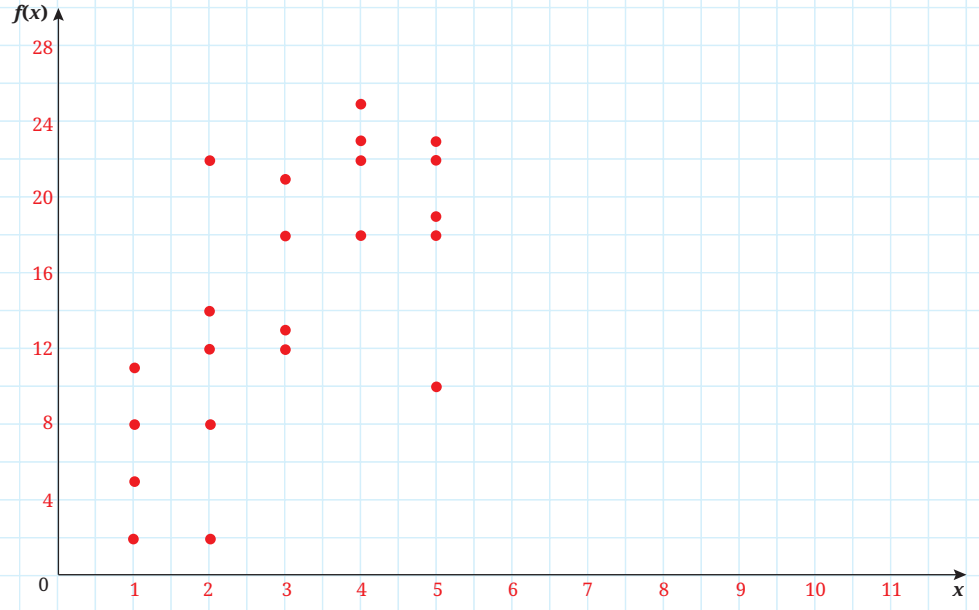
★★**9.** Représentez la distribution suivante à l'aide du mode de représentation indiqué.

**(5, 10), (2, 8), (4, 25), (3, 12), (1, 5), (5, 22), (4, 18), (3, 18), (2, 14), (3, 21), (1, 11), (2, 22), (3, 18), (4, 23), (5, 19), (5, 23), (1, 8), (1, 2), (2, 2), (5, 23), (2, 12), (4, 22), (5, 18), (3, 13)**

**a** Un tableau à double entrée (vous pouvez regrouper les données en classe)

| | [0, 5[ | [5, 10[ | [10, 15[ | [15, 20[ | [20, 25] | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 0 | 1 | 5 |
| 3 | 0 | 0 | 2 | 2 | 1 | 5 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 4 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| Total | 2 | 3 | 6 | 5 | 8 | 24 |

**b** Un nuage de points



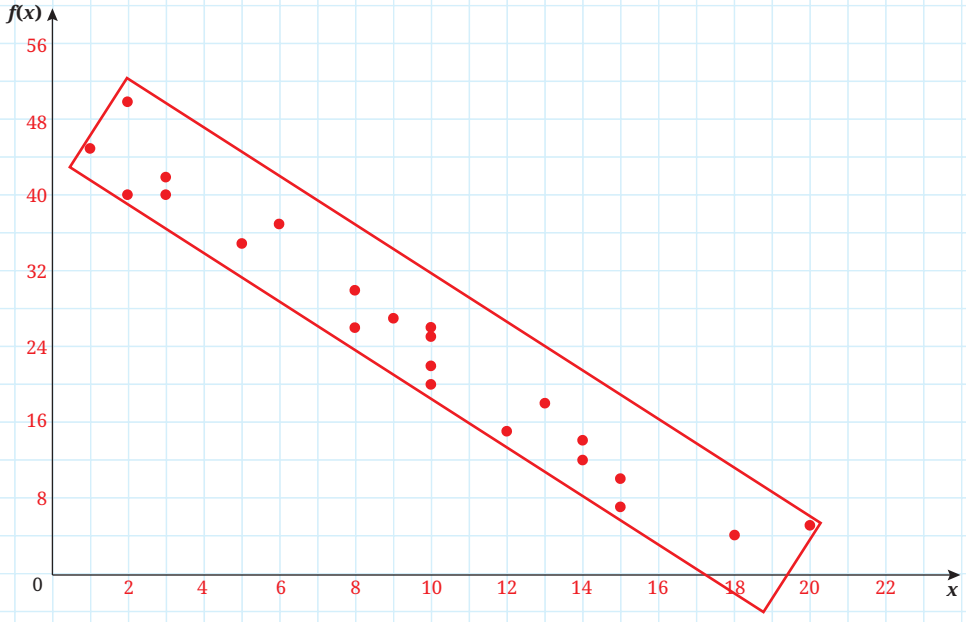

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★ **10.** Qualifiez le sens et l'intensité du coefficient de corrélation de la distribution ci-dessous. Pour ce faire, représentez-la à l'aide d'un nuage de points.

**(10, 25), (2, 40), (15, 10), (20, 5), (5, 35), (10, 20), (2, 50), (3, 40), (10, 22), (15, 7), (12, 15), (8, 30), (9, 27), (14, 14), (1, 45), (3, 42), (6, 37), (14, 12), (18, 4), (8, 26), (10, 26), (13, 18)**




Mesure du grand côté : 110 mm
Mesure du petit côté : 15 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

$$r = -\left(1 - \frac{15}{110}\right)$$

$$r \approx -(1 - 0{,}13)$$

$$r \approx -0{,}87$$

**RÉPONSE** La corrélation est forte et négative.

**11.** Des spécialistes en environnement ont effectué une étude sur la consommation d'essence de la population québécoise. Leur but est de démontrer que le fait d'habiter loin de son milieu de travail a un impact écologique. Ils ont compilé les premiers résultats de leur étude dans le tableau à double entrée ci-dessous.

| DISTANCE DU MILIEU DE TRAVAIL (km) \ NOMBRE DE PLEINS D'ESSENCE PAR MOIS | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **20** | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 |
| **40** | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 8 |
| **60** | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 7 |
| **80** | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 6 |
| **TOTAL** | 4 | 6 | 6 | 4 | 3 | 3 | 26 |

Myra habite à 45 km de son travail. Si sa voiture contient 40 litres d'essence et que celle-ci se vend à 1,22 $/litre, quel sera son budget par mois pour l'essence ?

**1** Règle de la droite de régression

(1, 20), (1, 20), (1, 40), (1, 40), (2, 20), (2, 20), (2, 40), (2, 40), (2, 40), (2, 60), (3, 20), (3, 40), (3, 40), (3, 60), (3, 60), (3, 80), (4, 40), (4, 60), (4, 60), (4, 80), (5, 60), (5, 80), (5, 80), (6, 60), (6, 80), (6, 80)

Groupe 1 : (1, 20), (1, 20), (1, 40), (1, 40), (2, 20), (2, 20), (2, 40), (2, 40), (2, 40), (2, 60), (3, 20), (3, 40), (3, 40)

Groupe 2 : (3, 60), (3, 60), (3, 80), (4, 40), (4, 60), (4, 60), (4, 80), (5, 60), (5, 80), (5, 80), (6, 60), (6, 80), (6, 80)

$$x_1 = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3}{13}$$

$$x_1 = \frac{25}{13}$$

$$x_1 \approx 1{,}92$$

$$y_1 = \frac{20 + 20 + 40 + 40 + 20 + 20 + 40 + 40 + 40 + 60 + 20 + 40 + 40}{13}$$

$$y_1 = \frac{440}{13}$$

$$y_1 \approx 33{,}85$$

$P_1(1{,}92\,;\,33{,}85)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

$$x_2 = \frac{3+3+3+4+4+4+4+5+5+5+6+6+6}{13}$$

$$x_2 = \frac{58}{13}$$

$$x_2 \approx 4{,}46$$

$$y_2 = \frac{60+60+80+40+60+60+80+60+80+80+60+80+80}{13}$$

$$y_2 = \frac{880}{13}$$

$$y_2 \approx 67{,}69$$

$P_2(4{,}46\,;\,67{,}69)$

**2** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$a = \frac{67{,}69 - 33{,}85}{4{,}46 - 1{,}92}$$

$$a = \frac{33{,}84}{2{,}54}$$

$$a \approx 13{,}32$$

$$y = 13{,}32x + b$$

$$33{,}85 = 13{,}32(1{,}92) + b$$

$$33{,}85 = 25{,}57 + b$$

$$8{,}28 \approx b$$

$$y = 13{,}32x + 8{,}28$$

**3** Nombre de pleins d'essence par mois pour une distance de 45 km

$$y = 13{,}32x + 8{,}28$$

$$45 = 13{,}32x + 8{,}28$$

$$36{,}72 = 13{,}32x$$

2,76 pleins d'essence $\approx x$

**4** Quantité d'essence par mois

$40 \bullet 2{,}76 = 110{,}40$ L

**5** Coût pour l'essence

$110{,}40 \bullet 1{,}22 = 134{,}69$

**RÉPONSE** Myra aura un budget de 134,69 $ par mois pour l'essence.

**12.** Jade et Mohamed sont présentement en 5e secondaire et ils font leur demande d'admission pour le cégep. Tous les deux veulent entrer dans un programme très contingenté. À la fin de la sélection, le cégep a le choix d'accepter soit Mohamed, soit Jade. En vous basant sur des arguments mathématiques, déterminez qui de Jade ou de Mohamed le cégep devrait choisir s'ils ont tous les deux une moyenne de 85 %.

**Moyenne générale des membres du groupe de Mohamed**

56, 57, 58, 59, 60, 60, 62, 63, 64, 65, 65, 66, 66, 67, 67, 69, 70, 70, 71, 72, 75, 77, 78, 79, 79, 81, 82, 84, 84, 85, 85, 85, 88, 89, 92, 93, 94, 95

**Moyenne du groupe :** 74 %

**Moyenne générale des membres du groupe de Jade**

63, 63, 63, 64, 64, 66, 66, 67, 67, 68, 69, 70, 70, 70, 70, 70, 71, 71, 71, 71, 72, 73, 73, 74, 75, 75, 76, 77, 77, 79, 84, 85, 85, 86, 86, 87, 88, 88, 88, 89, 89, 90

**Moyenne du groupe :** 75 %

**1** Rang centile de Mohamed

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{29 + \frac{3}{2}}{38} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{30{,}5}{38} \cdot 100$$

Rang centile $\approx$ 80,26, donc 81e rang centile

**2** Rang centile de Jade

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{31 + \frac{2}{2}}{42} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{32}{42} \cdot 100$$

Rang centile $\approx$ 76,19, donc 77e rang centile

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

**3** Écart moyen de Mohamed

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 74 – 56 = 18 | 74 – 64 = 10 | 74 – 70 = 4 | 79 – 74 = 5 | 88 – 74 = 14 |
| 74 – 57 = 17 | 74 – 65 = 9 | 74 – 70 = 4 | 81 – 74 = 7 | 89 – 74 = 15 |
| 74 – 58 = 16 | 74 – 65 = 9 | 74 – 71 = 3 | 82 – 74 = 8 | 92 – 74 = 18 |
| 74 – 59 = 15 | 74 – 66 = 8 | 74 – 72 = 2 | 84 – 74 = 10 | 93 – 74 = 19 |
| 74 – 60 = 14 | 74 – 66 = 8 | 75 – 74 = 1 | 84 – 74 = 10 | 94 – 74 = 20 |
| 74 – 60 = 14 | 74 – 67 = 7 | 77 – 74 = 3 | 85 – 74 = 11 | 95 – 74 = 21 |
| 74 – 62 = 12 | 74 – 67 = 7 | 78 – 74 = 4 | 85 – 74 = 11 | |
| 74 – 63 = 11 | 74 – 69 = 5 | 79 – 74 = 5 | 85 – 74 = 11 | |

$18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 14 + 12 + 11 + 10 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 5 + 4 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 5 + 5 + 7 + 8 + 10 + 10 + 11 + 11 + 11 + 14 + 15 + 18 + 19 + 20 + 21 = 386$

$$\text{Écart moyen} = \frac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\text{Écart moyen} = \frac{386}{38}$$

$$\text{Écart moyen} \approx 10{,}15$$

**4** Écart moyen de Jade

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 75 – 63 = 12 | 75 – 67 = 8 | 75 – 71 = 4 | 75 – 75 = 0 | 85 – 75 = 10 |
| 75 – 63 = 12 | 75 – 68 = 7 | 75 – 71 = 4 | 75 – 75 = 0 | 86 – 75 = 11 |
| 75 – 63 = 12 | 75 – 69 = 6 | 75 – 71 = 4 | 76 – 75 = 1 | 86 – 75 = 11 |
| 75 – 64 = 11 | 75 – 70 = 5 | 75 – 71 = 4 | 77 – 75 = 2 | 87 – 75 = 12 |
| 75 – 64 = 11 | 75 – 70 = 5 | 75 – 72 = 3 | 77 – 75 = 2 | 88 – 75 = 13 |
| 75 – 66 = 9 | 75 – 70 = 5 | 75 – 73 = 2 | 79 – 75 = 4 | 88 – 75 = 13 |
| 75 – 66 = 9 | 75 – 70 = 5 | 75 – 73 = 2 | 84 – 75 = 9 | 88 – 75 = 13 |
| 75 – 67 = 8 | 75 – 70 = 5 | 75 – 74 = 1 | 85 – 75 = 10 | 89 – 75 = 14 |
| | | | | 89 – 75 = 14 |
| | | | | 90 – 75 = 15 |

$12 + 12 + 12 + 11 + 11 + 9 + 9 + 8 + 8 + 7 + 6 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 1 + 2 + 2 + 4 + 9 + 10 + 10 + 11 + 11 + 12 + 13 + 13 + 13 + 14 + 14 + 15 = 308$

$$\text{Écart moyen} = \frac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\text{Écart moyen} = \frac{308}{42}$$

$$\text{Écart moyen} \approx 7{,}33$$

**5** Interprétation des données

Mohamed : rang centile = 81 et écart moyen = 10,15
Il se situe donc à 0,85 écart moyen de la moyenne.
Jade : rang centile = 77 et écart moyen = 7,33
Elle se situe donc à 2,67 écart moyen de la moyenne.
Mohamed est favorisé par le rang centile, mais Jade est favorisée par l'écart moyen.

**RÉPONSE**

*Réponse personnelle.* Selon moi, le cégep devrait choisir Mohamed, qui a un meilleur rang centile que Jade.

# SITUATION D'APPLICATION

CD2

## Le banquet de Noël

Emmanuelle est gérante d'une épicerie. Chaque année, à l'approche des Fêtes, le personnel et elle doivent redoubler d'ardeur pour s'assurer que la clientèle trouve dans les rayons tous les produits nécessaires à la confection du repas de Noël. Le 22 décembre, une cliente pose à Emmanuelle la question suivante : « Si je reçois 32 personnes pour Noël, combien croyez-vous que mon épicerie coûtera ? » Emmanuelle va alors consulter ses notes de l'année dernière, qui sont résumées dans le tableau ci-dessous.

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

| PRIX DE L'ÉPICERIE POUR LE BANQUET DE NOËL EN FONCTION DU NOMBRE DE CONVIVES | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **NOMBRE DE CONVIVES** | 5 | 10 | 12 | 14 | 16 | 24 | 25 | 28 | 30 | 35 |
| **PRIX DE L'ÉPICERIE ($)** | 120 | 180 | 175 | 210 | 250 | 300 | 275 | 350 | 350 | 400 |

Emmanuelle sait aussi que, cette année, le prix de l'épicerie a augmenté de 4 % par rapport à celui de l'année passée. Que devrait répondre Emmanuelle à la cliente ?

**1** (5, 120), (10, 180), (12, 175), (14, 210), (16, 250), (24, 300), (25, 275), (28, 350), (30, 350), (35, 400)

**2** Groupe 1 : (5, 120), (10, 180), (12, 175), (14, 210), (16, 250)
Groupe 2 : (24, 300), (25, 275), (28, 350), (30, 350), (35, 400)

$x_1 = \dfrac{5 + 10 + 12 + 14 + 16}{5}$

$x_1 = \dfrac{57}{5}$

$x_1 = 11{,}4$

$y_1 = \dfrac{120 + 180 + 175 + 210 + 250}{5}$

$y_1 = \dfrac{935}{5}$

$y_1 = 187$

$P_1\ (11{,}4 ; 187)$

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

$$x_2 = \frac{24 + 25 + 28 + 30 + 35}{5}$$
$$x_2 = \frac{142}{5}$$
$$x_2 = 28{,}4$$
$$y_2 = \frac{300 + 275 + 350 + 350 + 400}{5}$$
$$y_2 = \frac{1675}{5}$$
$$y_2 = 335$$
$$P_2\,(28{,}4\,;\,335)$$

**3** $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$a = \frac{335 - 187}{28{,}4 - 11{,}4}$$
$$a = \frac{148}{17}$$
$$a \approx 8{,}71$$
$$y = 8{,}71x + b$$
$$187 = 8{,}71(11{,}4) + b$$
$$187 = 99{,}29 + b$$
$$87{,}71 \approx b$$
$$y = 8{,}71x + 87{,}71$$

**4** Nombre de convives

32 personnes + 1 cliente = 33 convives

**5** Prix d'une épicerie pour 33 convives l'année dernière

$$y = 8{,}71x + 87{,}71$$
$$y = 8{,}71(33) + 87{,}71$$
$$y = 287{,}43 + 87{,}71$$
$$y = 375{,}14$$

**6** Prix d'une épicerie pour 33 convives cette année

$375{,}14 \bullet 1{,}04 \approx 390{,}15$

**RÉPONSE** Emmanuelle devrait répondre à la cliente que l'épicerie devrait lui coûter 390,15 $.

# SITUATION-PROBLÈME

CD1

## Le Grand Vert

Le terrain de golf Le Grand Vert compte plusieurs membres, qui paient pour la saison complète afin d'avoir accès au site en tout temps. Après la saison, les propriétaires de l'endroit leur demande leur pointage moyen afin de vérifier si le terrain est toujours adéquat ou s'il doit être modifié. Voici la liste des moyennes obtenues.

| POINTAGE MOYEN | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| NOMBRE DE MEMBRES | 3 | 5 | 4 | 15 | 9 | 28 | 18 | 24 | 32 | 34 | 29 | 48 | 35 | 38 | 17 | 20 | 14 | 27 |

Lors de la dernière journée de la saison, les personnes qui ont joué une partie indiquent sur leur carte de golf le nombre de rondes auxquelles elles ont participé pendant la saison ainsi que leur pointage moyen. La liste ci-dessous comprend les informations fournies par 25 membres.

(12, 80), (12, 85), (13, 84), (15, 82), (15, 86), (16, 80), (18, 80), (19, 78), (20, 75), (20, 78), (22, 75), (23, 77), (25, 75), (26, 73), (28, 74), (30, 72), (30, 75), (32, 69), (32, 72), (33, 71), (35, 70), (35, 70), (38, 71), (40, 69), (40, 69)

Quel rang centile des pointages moyens occupe une personne qui joue 30 fois par année ?

Plusieurs démarches possibles.

**1** Équation de la droite de régression des pointages moyens en fonction du nombre de rondes jouées

Premier groupe

(12, 80), (12, 85), (13, 84), (15, 82), (15, 86), (16, 80), (18, 80), (19, 78), (20, 75), (20, 78), (22, 75), (23, 77), (25, 75)

$$x_1 = \frac{12 + 12 + 13 + 15 + 15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 20 + 22 + 23 + 25}{13}$$

$$x_1 = \frac{230}{13}$$

$$x_1 \approx 17{,}69$$

$$y_1 = \frac{80 + 85 + 84 + 86 + 82 + 80 + 80 + 78 + 75 + 78 + 75 + 77 + 75}{13}$$

$$y_1 = \frac{1035}{13}$$

$$y_1 \approx 79{,}62$$

$P_1(17{,}69\,;\,79{,}62)$

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

Second groupe

(25, 75), (26, 73), (28, 74), (30, 72), (30, 75), (32, 69), (32, 72), (33, 71), (35, 70), (35, 70), (38, 71), (40, 69), (40, 69)

$$x_2 = \frac{25 + 26 + 28 + 30 + 30 + 32 + 32 + 33 + 35 + 35 + 38 + 40 + 40}{13}$$

$$x_2 = \frac{424}{13}$$

$$x_2 \approx 32{,}62$$

$$y_2 = \frac{75 + 73 + 74 + 72 + 75 + 69 + 72 + 71 + 70 + 70 + 71 + 69 + 69}{13}$$

$$y_2 = \frac{930}{13}$$

$$y_2 \approx 71{,}54$$

$P_2(32{,}62\,;71{,}54)$

**2** Équation de la droite de régression

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{71{,}54 - 79{,}62}{32{,}62 - 17{,}69}$$

$$a = \frac{-8{,}08}{14{,}93}$$

$$a \approx -0{,}54$$

$$y = -0{,}54x + b$$

$$71{,}54 = -0{,}54(32{,}62) + b$$

$$71{,}54 = -17{,}61 + b$$

$$89{,}15 \approx b$$

$$y = -0{,}54x + 89{,}15$$

Pointage moyen d'une personne qui joue 30 rondes de golf

$$y = -0{,}54(30) + 89{,}15$$

$$y \approx 73$$

Nombre total de membres

$3 + 5 + 4 + 15 + 9 + 28 + 18 + 24 + 32 + 34 + 29 + 48 + 35 + 38 + 17 + 20 + 14 + 27 = 400$

**3** Rang centile d'une personne qui a un pointage moyen de 73

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \dfrac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{27 + \dfrac{9}{2}}{400} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} = \frac{31{,}5}{400} \cdot 100$$

$$\text{Rang centile} \approx 7{,}88$$

$$\text{Rang centile} = 8$$

**RÉPONSE** Le rang centile des pointages moyens d'une personne qui joue 30 fois par année est 8.

# FEUILLE DE NOTES

## Diagramme à tige et à feuilles

1. Mettre les données en ordre croissant.
2. Placer les dizaines de chaque donnée dans la tige en faisant des bonds constants.
3. Placer les unités de chaque donnée à côté de la dizaine correspondante.

## Écart moyen

1. Calculer la moyenne de la distribution.
2. Calculer l'écart entre chaque donnée et la moyenne (un écart est toujours positif).
3. Calculer la somme de tous les écarts obtenus à l'étape 2.
4. Diviser la somme des écarts à la moyenne par le nombre de données.

## Corrélation

**Tableau à double entrée**

Positive : ↘ Négative : ↗

**Nuage de points**

Positive : ↗ Négative : ↘

**Coefficient de corrélation**

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

**Calcul (truc du rectangle)**

| Valeur du coefficient de corrélation | Intensité de la corrélation |
|---|---|
| Près de 0 | Nulle |
| Près de ±0,50 | Faible |
| Près de ±0,75 | Moyenne |
| Près de ±0,87 | Forte |
| Près de ±1 | Parfaite |

## Rang centile

**Calcul**

$$\text{Rang centile} = \frac{\text{Nombre de données inférieures à la donnée} + \frac{\text{Nombre de données égales à la donnée}}{2}}{\text{Nombre total de données}} \cdot 100$$

1. Calculer le nombre de données inférieures à la donnée.
2. Calculer le nombre de fois que la donnée apparaît dans la distribution.
3. Calculer le rang centile à l'aide de la formule.

**Recherche d'une donnée**

$$\text{Nombre de données inférieures ou égales} = \frac{\text{Rang centile}}{100} \cdot \text{Nombre total de données}$$

1. Remplacer les valeurs connues dans la formule et trouver le nombre de données inférieures ou égales à la donnée.
2. Identifier la donnée recherchée dans la distribution.

## Droite de régression

**Méthode de Mayer**

1. Placer les données en ordre croissant selon la variable indépendante.
2. Séparer la distribution en deux groupes ayant le même nombre de données. Distribution impaire → donnée du centre dans les deux groupes.
3. Déterminer la moyenne des abscisses et des ordonnées dans chacun des deux groupes pour obtenir les points $P_1$ et $P_2$.
4. Déterminer l'équation de la droite passant par les points $P_1$ et $P_2$.

**Méthode médiane-médiane**

1. Placer les données en ordre croissant selon la variable indépendante.
2. Séparer la distribution en 3 groupes → si ce n'est pas possible, le 2e groupe aura une donnée de plus ou de moins que les deux autres groupes.
3. Déterminer la médiane de chaque groupe pour obtenir les points $M_1$, $M_2$ et $M_3$.
4. Déterminer le point P (moyenne des trois points).
5. Déterminer $a$ à l'aide des points $M_1$ et $M_3$.
6. Déterminer $b$ à l'aide du point P.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# CONSOLIDATION DE L'ÉTAPE 3

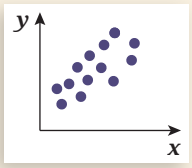
## QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Pour chacune des questions à choix multiples, encerclez la bonne réponse.

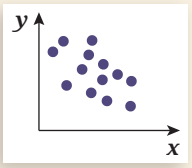
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★**1.** Quel nuage de points correspond à la corrélation la plus forte ?

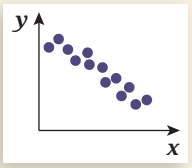
**a**



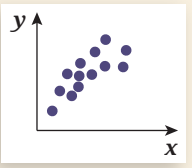

**b**



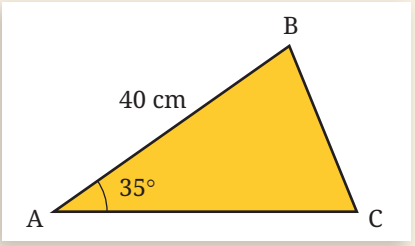

**c**




**d**




★**2.** Combien mesure le côté AC du triangle ci-contre si l'aire de celui-ci est de 516,22 cm² ?




**a** 11,25 cm

**b** 22,5 cm

**c** 45 cm

**d** 90 cm

★**3.** Quelle est l'aire, au centième près, d'un triangle équilatéral dont chaque côté mesure 34 cm ?

**a** 500,56 cm²

**b** 578 cm²

**c** 1001,13 cm²

**d** 5663,22 cm²

★**4.** Quel est le rang centile de 58 dans la distribution suivante ?

$$21, 32, \underbrace{\ldots}_{72\text{ données}}, 43, 46, \underbrace{\ldots}_{46\text{ données}}, 56, 58, 58, 59, \underbrace{\ldots}_{58\text{ données}}, 73$$

**a** 32

**b** 33

**c** 67

**d** 68

### CALCULS

★★**5.** À partir du diagramme à tige et à feuilles ci-contre, identifiez la moyenne, le mode, la médiane et l'étendue de la distribution donnée.

| | |
|---|---|
| 1 | 0 2 4 5 7 |
| 2 | 0 0 0 1 3 5 |
| 3 | 1 3 4 5 7 8 |
| 4 | 4 5 5 9 9 |
| 5 | 0 2 3 |

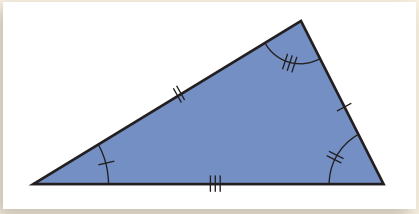
**a** Moyenne : 31,68
Mode : 20
Médiane : 33
Étendue : 43

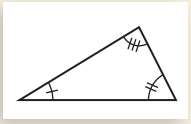
**b** Moyenne : 31,68
Mode : 20
Médiane : 36
Étendue : 43

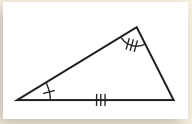
**c** Moyenne : 26,43
Mode : 20
Médiane : 36
Étendue : 4

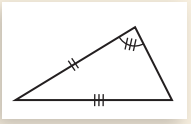
**d** Moyenne : 26,43
Mode : 0
Médiane : 33
Étendue : 4

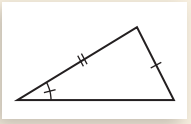
★★**6.** Quel triangle est assurément isométrique au triangle ci-contre ?



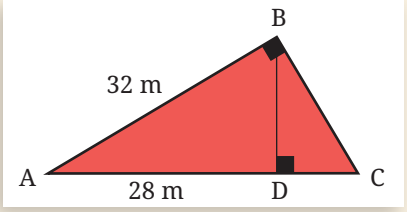
**a**


**b**


**c**


**d**


★★**7.** Quelle est, au dixième près, la mesure du segment DC du triangle ci-contre, si les segments AD et AB mesurent respectivement 28 m et 32 m ?



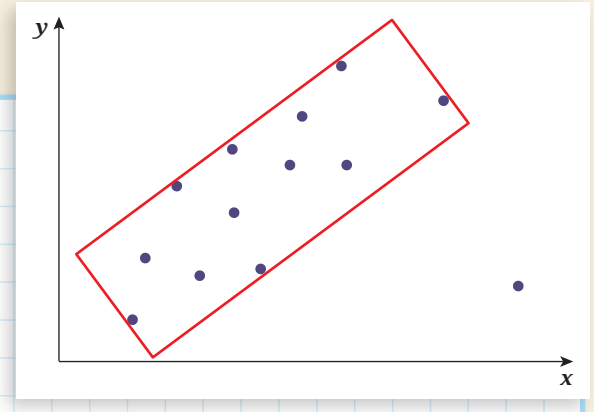

**a** 8,6 m **b** 12,5 m **c** 15,5 m **d** 36,6 m

## CALCULS

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À COURT DÉVELOPPEMENT

★★8. Calculez le coefficient de corrélation du nuage de points suivant.




Mesure du grand côté : 51 mm
Mesure du petit côté : 17 mm

$$r = \pm\left(1 - \frac{\text{Mesure du petit côté}}{\text{Mesure du grand côté}}\right)$$

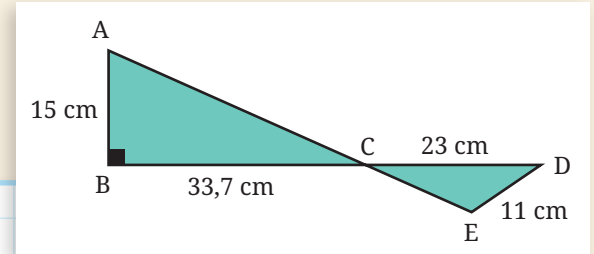
$$r = \left(1 - \frac{17}{51}\right)$$

$$r \approx (1 - 0{,}33)$$

$$r \approx 0{,}67$$

**RÉPONSE** $r \approx 0{,}67$

★★★9. Déterminez, à l'unité près, la mesure de l'angle DEC de la figure ci-contre, sachant que le point C est l'intersection des segments de droite BD et AE.




**1** m∠ACB

$$\tan C = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

$$\tan C = \frac{15}{33{,}7}$$

$$\tan C \approx 0{,}445\,1$$

$$\text{m}\angle C \approx \tan^{-1}(0{,}445\,1)$$

$$\text{m}\angle C \approx 23{,}993\,8°$$

**2** m∠DCE

m∠DCE = m∠ACB, car ils sont opposés par le sommet.

**3** m∠DEC

$$\frac{\square}{\sin E} = \frac{\square}{\sin C}$$

$$\frac{23}{\sin E} = \frac{11}{\sin(23{,}993\,8)}$$

$$23 \cdot \sin(23{,}993\,8) = 11 \cdot \sin E$$

$$\frac{23 \cdot \sin(23{,}993\,8)}{11} = \sin E$$

$$0{,}850\,2 \approx \sin E$$

$$\sin^{-1}(0{,}850\,2) \approx \text{m}\angle E$$

$$58{,}233\,4° \approx \text{m}\angle E$$

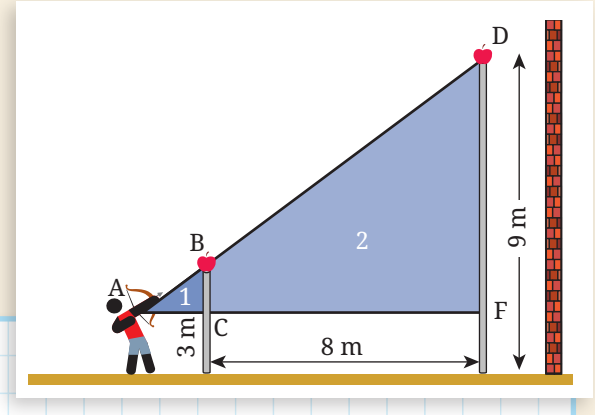
**4** Mesure de l'angle obtus

$$180 - (58{,}233\,4) \approx 122°$$

**RÉPONSE** m∠DEC ≈ 122°

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

**10.** Lors d'un tournoi de tir à l'arc, les concurrents doivent tirer une flèche au travers de deux pommes avant qu'elle touche un mur. L'arc se trouve à 1,75 m du sol. Quelle est la distance entre les concurrents et le cylindre supportant la seconde pomme ?




**1** Hauteur entre le départ de la flèche et les deux cylindres
Petit cylindre : 3 – 1,75 = 1,25
Grand cylindre : 9 – 1,75 = 7,25

**2** Preuve que le triangle ABC est semblable au triangle ADF

| Affirmation | Justification |
|---|---|
| m∠BAC = m∠BAC | Il s'agit du même angle. |
| m∠ACB = m∠AFD = 90° | Les triangles 1 et 2 sont rectangles par déduction, car $\overline{BC}$ et $\overline{DF}$ sont des hauteurs nécessairement perpendiculaires au sol. |
| ΔABC ~ ΔADF | Ils respectent la condition AA. |

**3** Distance entre les concurrents et le premier cylindre

$$\frac{1{,}25}{7{,}25} = \frac{\square}{\square + 8}$$

$1{,}25x + 10 = 7{,}25x$
$10 = 6x$
$1{,}67 \approx x$

**4** Distance entre les concurrents et le deuxième cylindre
$1{,}67 + 8 \approx 9{,}67$

**RÉPONSE** Les concurrents se trouvent à 9,67 m du deuxième cylindre.

**11.** Complétez le tableau à double entrée fourni, puis qualifiez la corrélation de la distribution ci-dessous, qui représente le nombre d'appareils mobiles (tablettes et cellulaires) en fonction du nombre de personnes vivant sous le même toit.

**(1, 0) (1, 1) (1, 2) (2, 1) (2, 2) (2, 2) (2, 2) (2, 3) (2, 3) (2, 4) (2, 4) (3, 2) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 4) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (3, 7) (4, 4) (4, 4) (4, 4) (4, 5) (4, 5) (4, 6) (4, 7) (4, 7) (4, 8) (4, 8) (4, 11) (5, 6) (5, 8) (5, 8) (5, 8) (5, 9) (5, 9) (5, 10) (5, 10) (5, 11)**

| NOMBRE D'APPAREILS MOBILES / NOMBRE DE PERSONNES | [0, 2[ | [2, 4[ | [4, 6[ | [6, 8[ | [8, 10[ | [10, 12[ | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 2 | 1 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 3 | 0 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 9 |
| 4 | 0 | 0 | 5 | 3 | 2 | 1 | 11 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 | 3 | 9 |
| TOTAL | 3 | 9 | 11 | 6 | 7 | 4 | 40 |

La corrélation est positive et forte.



© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# QUESTIONS À LONG DÉVELOPPEMENT

★★**12.** Votre enseignant de mathématique a compilé les résultats du dernier test de votre groupe dans le tableau ci-contre. Calculez l'écart moyen de cette distribution.

| RÉSULTATS DU DERNIER TEST DE MATHÉMATIQUE | |
|---|---|
| **RÉSULTAT** | **EFFECTIF** |
| 9 | 1 |
| 11 | 4 |
| 12 | 3 |
| 14 | 5 |
| 15 | 2 |
| 16 | 3 |
| 18 | 4 |
| 19 | 1 |
| 20 | 1 |

**1** Moyenne de la distribution

$$\bar{x} = \frac{\text{Somme des données}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\bar{x} = \frac{9+(11\cdot4)+(12\cdot3)+(14\cdot5)+(15\cdot2)+(16\cdot3)+(18\cdot4)+19+20}{1+4+3+5+2+3+4+1+1}$$

$$\bar{x} = \frac{348}{24}$$

$$\bar{x} = 14{,}5$$

**2** Écarts à la moyenne

$14{,}5 - 9 = 5{,}5$
$14{,}5 - 11 = 3{,}5$
$14{,}5 - 12 = 2{,}5$
$14{,}5 - 14 = 0{,}5$
$15 - 14{,}5 = 0{,}5$
$16 - 14{,}5 = 1{,}5$
$18 - 14{,}5 = 3{,}5$
$19 - 14{,}5 = 4{,}5$
$20 - 14{,}5 = 5{,}5$

**3** Somme des écarts à la moyenne

$5{,}5 + (3{,}5 \cdot 4) + (2{,}5 \cdot 3) + (0{,}5 \cdot 5) + (0{,}5 \cdot 2) + (1{,}5 \cdot 3) + (3{,}5 \cdot 4) + 4{,}5 + 5{,}5 = 59$

**4** Écart moyen

$$\text{Écart moyen} = \frac{\text{Somme des écarts à la moyenne}}{\text{Nombre de données}}$$

$$\text{Écart moyen} = \frac{59}{24}$$

$$\text{Écart moyen} \approx 2{,}46$$

**RÉPONSE** L'écart moyen est de 2,46.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

★★ **13.** Julien est un athlète assidu. À la fin de chaque période d'entraînement, il inscrit la durée de ses exercices et le nombre de calories qu'il a brûlées. Utilisez la droite de Mayer pour déterminer le nombre de calories qu'il devrait dépenser aujourd'hui s'il s'entraîne durant 67 minutes.

| NOMBRE DE CALORIES BRÛLÉES EN FONCTION DE LA DURÉE D'ENTRAÎNEMENT | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **DURÉE (min)** | 38 | 42 | 53 | 60 | 71 | 76 | 82 | 87 | 93 |
| **NOMBRE DE CALORIES** | 532 | 615 | 792 | 1036 | 1147 | 1270 | 1383 | 1409 | 1611 |

**1** Équation de la droite de Mayer

$x_1 = \dfrac{38 + 42 + 53 + 60 + 71}{5}$

$x_1 = \dfrac{264}{5}$

$x_1 = 52{,}8$

$y_1 = \dfrac{532 + 615 + 792 + 1036 + 1147}{5}$

$y_1 = \dfrac{4122}{5}$

$y_1 = 824{,}4$

$P_1 \ (52{,}8\,;\, 824{,}4)$

$x_2 = \dfrac{71 + 76 + 82 + 87 + 93}{5}$

$x_2 = \dfrac{409}{5}$

$x_2 = 81{,}8$

$y_2 = \dfrac{1147 + 1270 + 1383 + 1409 + 1611}{5}$

$y_2 = \dfrac{6820}{5}$

$y_2 = 1364$

$P_2 \ (81{,}8\,;\, 1364)$

$a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$a = \dfrac{1364 - 824{,}4}{81{,}8 - 52{,}8}$

$a = \dfrac{539{,}6}{29}$

$a = \dfrac{2698}{145}$

$y = \dfrac{2698}{145}x + b$

$1364 = \dfrac{2698}{145}(81{,}8) + b$

$1364 \approx 1522{,}04 + b$

$-158{,}04 \approx b$

$y = \dfrac{2698}{145}x - 158{,}04$

**2** Calories dépensées pendant 67 minutes d'entraînement

$y = \dfrac{2698}{145}(67) - 158{,}04$

$y \approx 1088{,}62$

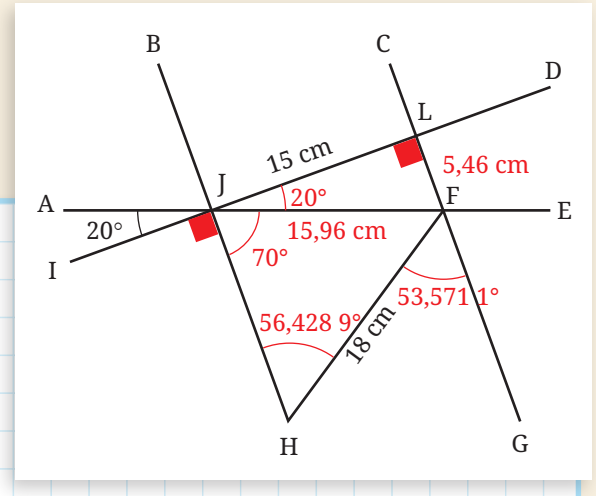
**RÉPONSE** Julien devrait dépenser 1088,62 calories.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

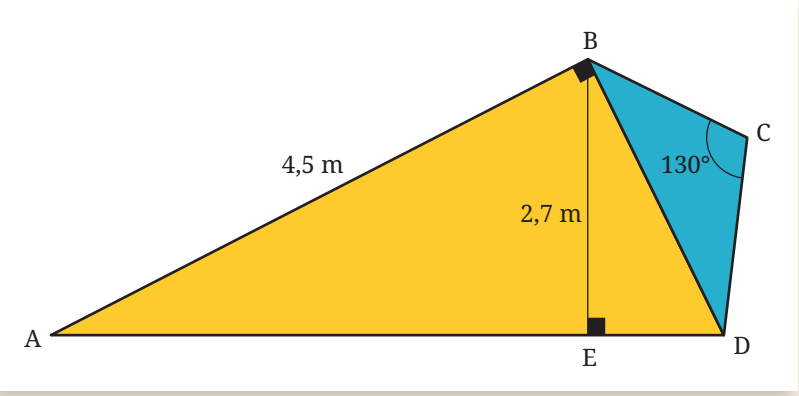
**14.** Calculez l'aire du quadrilatère JLFH, sachant que $\overline{BH}$ et $\overline{CG}$ sont parallèles et que $\overline{ID}$ est perpendiculaire à $\overline{BH}$ et à $\overline{CG}$.




Plusieurs démarches possibles

| Affirmation | Justification | |
|---|---|---|
| $m\angle IJH = m\angle JLF = 90°$ | On se base sur les données du problème. | |
| $m\angle LJF = 20°$ | Il est opposé par le sommet à $\angle AJI$. | |
| $m\overline{LF} \approx 5{,}459\ 6$ cm | On se réfère aux rapports trigonométriques. | $\tan A = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$<br>$\tan(20) = \frac{\square}{15}$<br>$15 \cdot \tan(20) = x$<br>$5{,}459\ 6 \text{ cm} \approx x$ |
| Aire $\Delta JLF \approx 40{,}947$ cm$^2$ | On se sert de la formule d'aire. | $A = \frac{bh}{2}$<br>$A = \frac{15 \cdot 5{,}459\ 6}{2}$<br>$A \approx 40{,}947$ cm$^2$ |
| $m\overline{JF} \approx 15{,}962\ 7$ cm | On recourt au théorème de Pythagore. | $a^2 + b^2 = c^2$<br>$5{,}459\ 6^2 + 15^2 = c^2$<br>$29{,}807\ 2 + 225 = c^2$<br>$254{,}807\ 2 = c^2$<br>$15{,}962\ 7 \text{ cm} \approx c$ |
| $m\angle LJF = 70°$ | Les angles AJI, IJH et LJF sont supplémentaires, et $180 - (90 + 20) = 70°$. | |
| $m\angle JHF \approx 56{,}428\ 9°$ | On recourt à la loi des sinus.<br>$\frac{\square}{\sin J} = \frac{\square}{\sin H}$<br>$\frac{18}{\sin(70)} = \frac{15{,}962\ 7}{\sin H}$ | $\sin H = \frac{15{,}962\ 7 \cdot \sin(70)}{18}$<br>$\sin H \approx 0{,}833\ 3$<br>$m\angle H \approx \sin^{-1}(0{,}833\ 3)$<br>$m\angle H \approx 56{,}439\ 2°$ |
| $m\angle JFH \approx 53{,}560\ 8°$ | La somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours 180°, et $180 - (70 + 56{,}439\ 2) \approx 53{,}560\ 8°$. | |
| Aire $\Delta JFH \approx 115{,}576\ 1$ cm$^2$ | On se sert de la formule trigonométrique. | $A = \frac{ab \sin C}{2}$<br>$A = \frac{15{,}962\ 7 \cdot 18 \cdot \sin(53{,}560\ 8)}{2}$<br>$A \approx 115{,}576\ 1$ cm$^2$ |
| Aire du quadrilatère JLFH $\approx 156{,}52$ cm$^2$ | On calcule la somme des aires des triangles JFH et JLF.<br>$115{,}576\ 1 + 40{,}947 \approx 156{,}52$ cm$^2$ | |

★★ **15.** Sur la façade de son magasin, Marie-Christine veut faire installer le logo de sa compagnie, qui est formé de deux triangles. Le triangle ABD est rectangle en B et le triangle BCD est isocèle. Les segments AB et BE mesurent respectivement 4,5 m et 2,7 m. La mesure de l'angle C est de 130°. Quelle somme devra débourser Marie-Christine si le matériel qu'elle utilise pour son logo se vend 45,95 $/m² ?




Plusieurs démarches possibles

**1** Mesure du segment AE

$a^2 + b^2 = c^2$

$2{,}7^2 + b^2 = 4{,}5^2$

$7{,}29 + b^2 = 20{,}25$

$b^2 = 12{,}96$

$b = 3{,}6$ m

**2** Mesure du segment AD

$a^2 = c_2 \bullet c$

$4{,}5^2 = 3{,}6 \bullet c$

$20{,}25 = 3{,}6 \bullet c$

$5{,}625 \text{ m} \approx c$

**3** Aire du triangle ABD

$A = \dfrac{bh}{2}$

$A = \dfrac{5{,}625 \bullet 2{,}7}{2}$

$A \approx 7{,}593\ 8 \text{ m}^2$

**4** Mesure du segment ED

$5{,}625 - 3{,}6 \approx 2{,}025$ m

**5** Mesure du segment BD

$b^2 = c_2 \bullet c$

$b^2 = 2{,}025 \bullet 5{,}625$

$b^2 \approx 11{,}390\ 6$

$b \approx 3{,}375$ m

**6** Mesure des angles CBD et CDB

$(180 - 130) \div 2 = 25°$

**7** Mesure des segments CB et CD

$$\frac{\square}{\sin A} = \frac{\square}{\sin B}$$

$$\frac{3{,}375}{\sin(130)} = \frac{\square}{\sin(25)}$$

$$\frac{3{,}375 \bullet \sin(25)}{\sin(130)} = b$$

$1{,}862 \text{ m} \approx b$

**8** Aire du triangle BCD

$$A = \frac{a \bullet b \bullet \sin C}{2}$$

$$A = \frac{1{,}862 \bullet 3{,}375 \bullet \sin(25)}{2}$$

$A \approx 1{,}327\ 9 \text{ m}^2$

**9** Aire totale du logo

$7{,}593\ 8 + 1{,}327\ 9 \approx 8{,}921\ 7 \text{ m}^2$

**10** Coût du logo

$8{,}921\ 7 \bullet 45{,}95 = 409{,}95$

**RÉPONSE** Marie-Christine devra débourser une somme de 409,95 $.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# RÉVISION INTERACTIVE

L'année scolaire tire à sa fin. Cette année, vous avez acquis de nombreuses connaissances. Le moment est venu pour vous de les revoir afin de vous préparer à l'évaluation finale.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

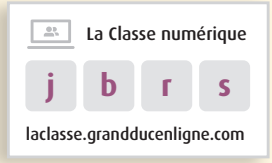
**1.** Révisez les notions dont vous vous souvenez pour chacun des chapitres.

**Comment accéder aux exercices ?**

**1.** Rendez-vous à laclasse.grandducenligne.com.
**Important :** Vous n'avez pas besoin de vous créer de compte pour réaliser les exercices.
**2.** Cliquez sur « Utiliser un code ».
**3.** Entrez le code à quatre caractères.

Pour chaque code, une série de questions vous seront posées. Répondez à toutes les questions. Avant d'envoyer votre exercice en correction, revoyez les réponses dont vous doutez de l'exactitude. Une fois votre exercice corrigé (ce qui est fait automatiquement en ligne), prenez connaissance de votre résultat.

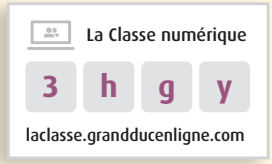
## Chapitre 1 : L'étude des fonctions




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 1.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

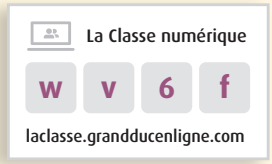
## Chapitre 2 : Les fonctions périodique, exponentielle et quadratique




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 2.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

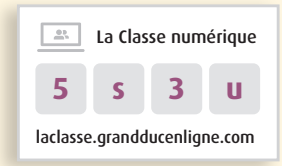
## Chapitre 3 : La géométrie analytique




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 3.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

## Chapitre 4 : Les systèmes d'équations




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 4.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

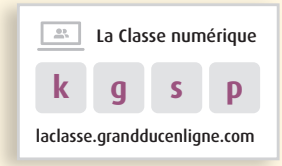
Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

## Chapitre 5 : Les similitudes et les isométries dans les triangles

Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 5.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

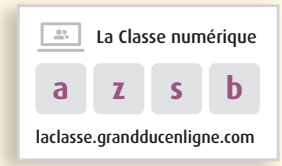
## Chapitre 6 : La trigonométrie




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 6.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

## Chapitre 7 : Les statistiques




Si votre résultat est insatisfaisant, consultez les encadrés théoriques du chapitre 7.
Retournez ensuite faire l'exercice sur la Classe numérique.

Si votre résultat est satisfaisant, résolvez la situation d'application que vous remet votre enseignant ou enseignante.

**2.** Vous êtes maintenant prêt ou prête à réaliser l'épreuve formative.

Vous devez :

- répondre à des questions à court développement ;
- résoudre des situations d'application ;
- résoudre une situation-problème.

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

# ANNEXE

## LA CALCULATRICE SCIENTIFIQUE ET LES SYMBOLES MATHÉMATIQUES

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

## La calculatrice scientifique

Selon le modèle de calculatrice, certaines touches peuvent différer. Voici quelles sont les principales :

- **symbole négatif :** le symbole négatif (⁻) est différent de celui de la soustraction (–).
  Sur les calculatrices, il est représenté par les touches [ - ], [ ± ] ou [ +/- ].
- **exposant :** l'exposant est représenté par les touches [ ^ ], [ $x^y$ ] ou [ $y^x$ ].
  Il ne faut pas le confondre avec les touches Exp ou EE, qui signifient $\times 10^x$ ;
- **racine carrée :** la racine carrée est représentée par la touche [ √ ] ;
- **pi :** le nombre pi est représenté par la touche [ π ] ;
- **nombre de permutations :** pour calculer le nombre de permutations d'un ensemble, il suffit d'entrer le nombre d'éléments de l'ensemble et d'appuyer sur la touche [ x! ].

## Les symboles mathématiques

### Géométrie

| | |
|---|---|
| $\angle A$ | Angle A |
| m $\angle A$ | Mesure de l'angle A |
| $\overline{AB}$ | Segment AB |
| m $\overline{AB}$ | Mesure du segment AB |
| $\overset{\frown}{ABC}$ | Arc ABC |
| m $\overset{\frown}{ABC}$ | Mesure de l'arc ABC |
| $\Delta ABC$ | Triangle ABC |
| $k$ | Rapport des longueurs |
| $k^2$ | Rapport des aires |
| $k^3$ | Rapport des volumes |
| $C$ | Circonférence |
| $r$ | Rayon |

| | |
|---|---|
| $d$ | Diamètre |
| $P$ | Périmètre |
| $c$ | Mesure d'un côté |
| $n$ | Nombre de côtés |
| $a$ | Apothème |
| $b$ | Base |
| $h$ | Hauteur |
| $B, b$ | Grande base et petite base d'un trapèze |
| $D, d$ | Grande diagonale et petite diagonale d'un losange |
| $A_T$ | Aire totale |
| $A_B$ | Aire de la base |
| $A_L$ | Aire latérale |

## Arithmétique

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | L'ensemble des nombres naturels |
| $\mathbb{Z}$ | L'ensemble des nombres entiers |
| $\mathbb{Q}$ | L'ensemble des nombres rationnels |
| $\mathbb{Q}'$ | L'ensemble des nombres irrationnels |
| $\mathbb{R}$ | L'ensemble des nombres réels |
| $\in$ | Est élément de |
| $\notin$ | N'est pas élément de |
| $\cup$ | Union |
| $\cap$ | Intersection |

| | |
|---|---|
| ' | Complément |
| { } ou $\varnothing$ | Ensemble vide |
| $\neq$ | N'est pas égal à |
| $<$ | Est inférieur à |
| $\leq$ | Est inférieur ou égal à |
| $>$ | Est supérieur à |
| $\geq$ | Est supérieur ou égal à |
| $x^2$ | Nombre au carré |
| $x^3$ | Nombre au cube |

## Probabilités et statistiques

| | |
|---|---|
| $P(A)$ | Probabilité de l'événement A |
| $\Omega$ | Univers des possibles |
| $n$ | Nombre d'éléments de l'ensemble |
| $k$ | Nombre d'éléments à choisir de l'ensemble |
| $\bar{x}$ | Moyenne |

| | |
|---|---|
| E | Étendue |
| EI | Étendue interquartile |
| $Q_1$ | Premier quartile d'une distribution |
| $Q_2$ | Médiane et deuxième quartile d'une distribution |
| $Q_3$ | Troisième quartile d'une distribution |

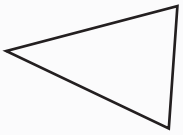
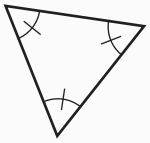
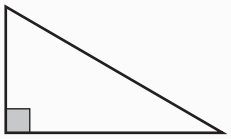
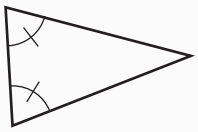
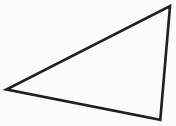
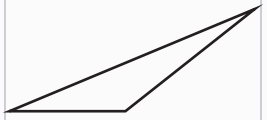
© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

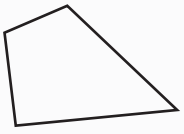
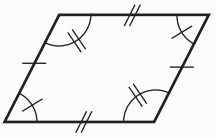
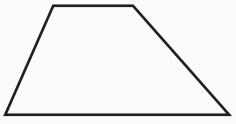
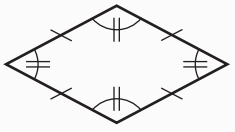
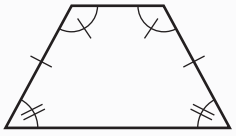
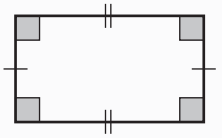
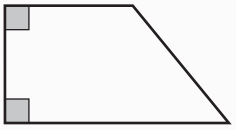
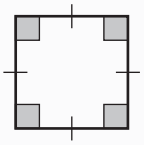
# LA GÉOMÉTRIE

## Les propriétés des triangles et des quadrilatères

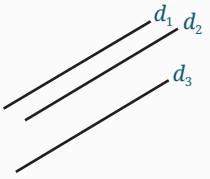
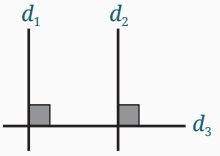
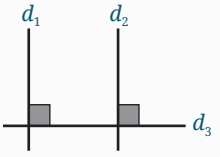
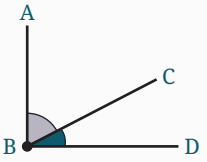
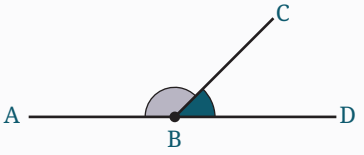
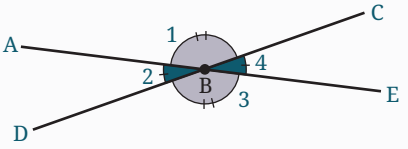
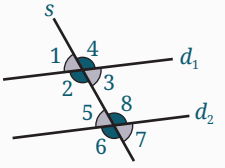
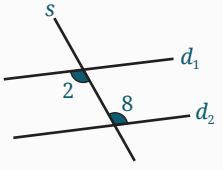
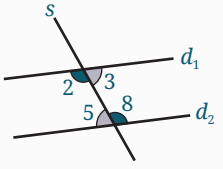
Les **triangles** sont des polygones à trois côtés. Par convention, on les classe à l'aide des caractéristiques de leurs angles ou de leurs côtés. Il est à noter que la somme des angles intérieurs d'un triangle est toujours égale à 180°.

| Nom du triangle | Caractéristiques | Figure | Nom du triangle | Caractéristiques | Figure |
|---|---|---|---|---|---|
| Scalène | 3 côtés inégaux |  | Équiangle | 3 angles égaux |  |
| Isocèle | 2 côtés égaux | | Rectangle | Un angle droit |  |
| Isoangle | 2 angles égaux |  | Acutangle | 3 angles aigus |  |
| Équilatéral | 3 côtés égaux | | Obtusangle | Un angle obtus |  |

Les **quadrilatères** sont des polygones à quatre côtés. On les classe selon leurs propriétés.

| Nom du quadrilatère | Propriétés | Figure | Nom du quadrilatère | Propriétés | Figure |
|---|---|---|---|---|---|
| Quelconque | Aucune caractéristique particulière |  | Parallélo-gramme | 2 paires de côtés isométriques et parallèles |  |
| Trapèze | Au moins 2 côtés parallèles |  | Losange | Côtés opposés parallèles et 4 côtés isométriques |  |
| Trapèze isocèle | Au moins 2 côtés isométriques et 2 paires d'angles isométriques |  | Rectangle | 4 angles droits et 2 paires de côtés parallèles et isométriques |  |
| Trapèze rectangle | Au moins 2 angles droits |  | Carré | 4 côtés isométriques et 4 angles droits |  |

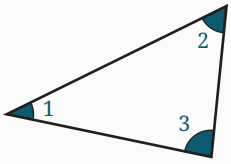
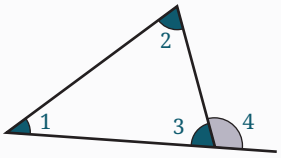
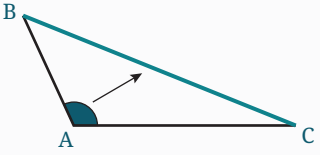
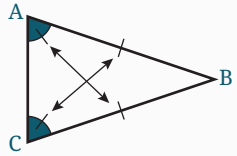
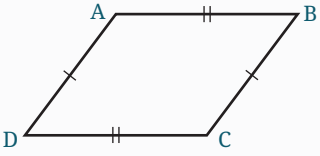
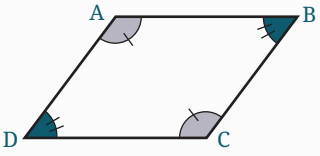
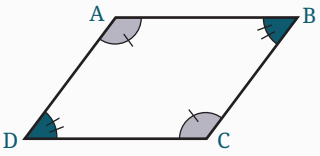
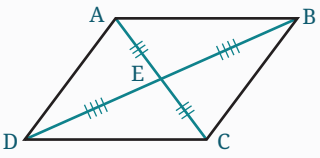
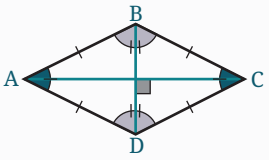
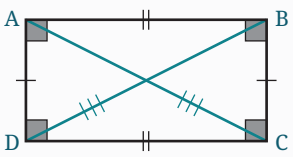
# Les principaux énoncés en géométrie

| | Énoncé | Exemple | |
|---|---|---|---|
| **1.** | Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles. | Si $d_1 \parallel d_3$ et $d_2 \parallel d_3$, alors $d_1 \parallel d_2$ |   |
| **2.** | Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles. | Si $d_1 \perp d_3$ et $d_2 \perp d_3$, alors $d_1 \parallel d_2$ |   |
| **3.** | Si deux droites sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une d'elles est perpendiculaire à l'autre. | Si $d_1 \parallel d_2$, alors $d_1 \perp d_3$ et $d_2 \perp d_3$ |   |
| **4.** | Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs forment un angle droit sont complémentaires. | m ∠ABC + m ∠CBD = 90° |   |
| **5.** | Deux angles adjacents dont les côtés extérieurs forment un angle plat sont supplémentaires. | m ∠ABC + m ∠CBD = 180° |   |
| **6.** | Deux angles opposés par le sommet sont isométriques. | ∠1 ≅ ∠3 et ∠2 ≅ ∠4 |   |
| **7.** | Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-externes, les angles alternes-internes et les angles correspondants sont isométriques entre eux. | Si $d_1 \parallel d_2$, alors : ∠1 ≅ ∠3 ≅ ∠5 ≅ ∠7 ∠2 ≅ ∠4 ≅ ∠6 ≅ ∠8 |   |
| **8.** | Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-externes, alternes-internes ou correspondants isométriques entre eux, alors elles sont parallèles. | Si ∠2 ≅ ∠8, alors $d_1 \parallel d_2$ |   |
| **9.** | Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles internes situés du même côté de la sécante sont supplémentaires. | Si $d_1 \parallel d_2$, alors : m ∠2 + m ∠5 = 180° et m ∠3 + m ∠8 = 180° |   |

© Grand Duc en ligne
Reproduction autorisée

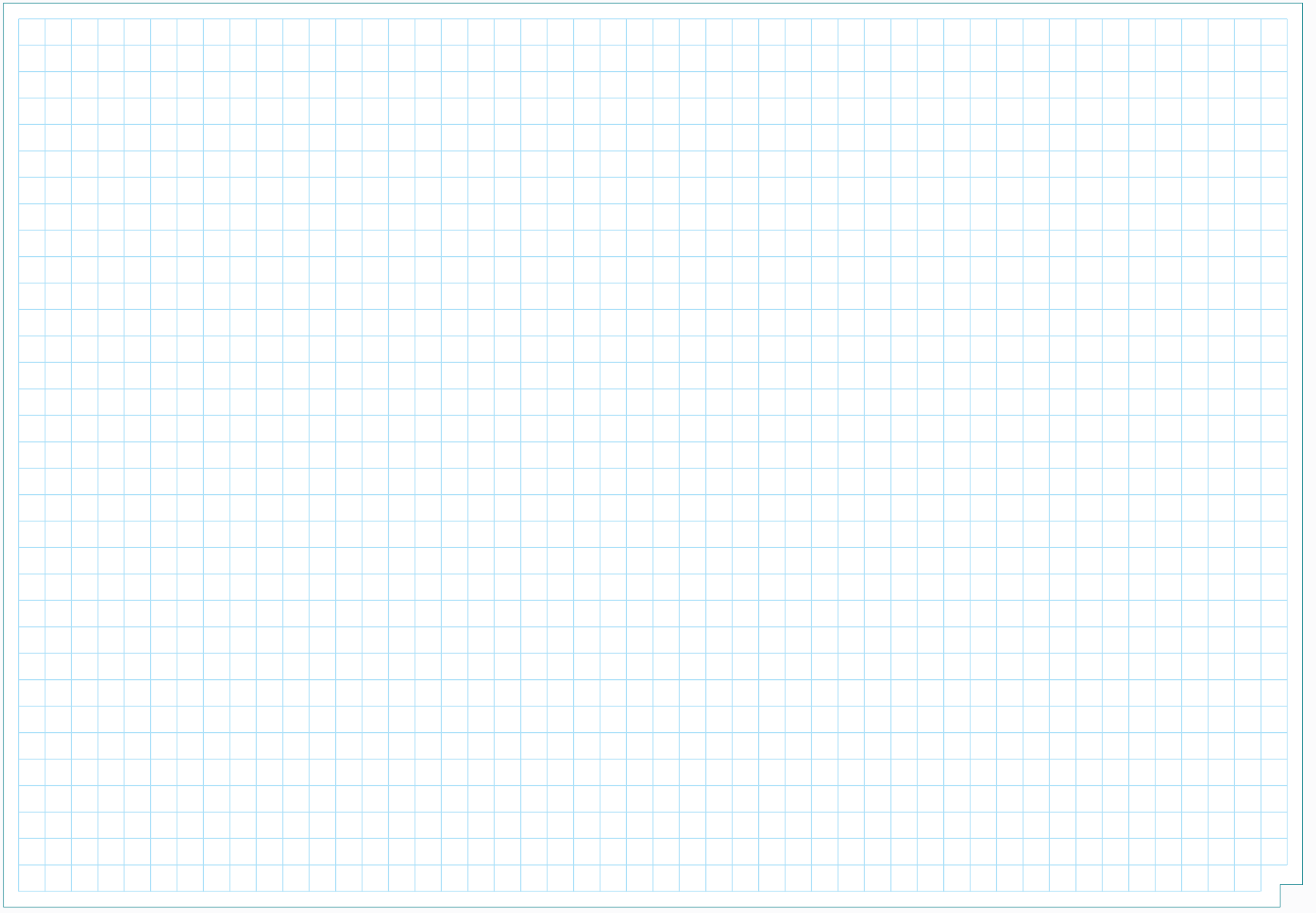
© Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée

| | Énoncé | Exemple |
|---|---|---|
| **10.** | La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°. | m ∠1 + m ∠2 + m ∠3 = 180°   |
| **11.** | La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents. | m ∠4 = m ∠1 + m ∠2   |
| **12.** | Dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté. | Dans le triangle ABC, m$\overline{BC}$ > m$\overline{AC}$ > m$\overline{AB}$, alors m ∠A > m ∠B > m ∠C   |
| **13.** | Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques et vice versa. | Dans le triangle isocèle ABC, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, alors ∠A ≅ ∠C   |
| **14.** | Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques. | Dans le parallélogramme ABCD, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ et $\overline{AD} \cong \overline{BC}$   |
| **15.** | Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques. | Dans le parallélogramme ABCD, ∠A ≅ ∠C et ∠B ≅ ∠D   |
| **16.** | Les angles consécutifs d'un parallélogramme sont supplémentaires. | Dans le parallélogramme ABCD, m ∠A + m ∠B = 180°, m ∠B + m ∠C = 180°, m ∠C + m ∠D = 180° et m ∠D + m ∠A = 180°   |
| **17.** | Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. | Dans le parallélogramme ABCD, $\overline{AE} \cong \overline{DE}$ et $\overline{BE} \cong \overline{CE}$   |
| **18.** | Les diagonales d'un losange se coupent perpendiculairement. | Dans le losange ABCD, $\overline{AC} \perp \overline{BD}$   |
| **19.** | Les diagonales d'un rectangle sont isométriques. | Dans le rectangle ABCD, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$   |

Reproduction autorisée © Grand Duc en ligne

Reproduction autorisée © Grand Duc en ligne



Reproduction autorisée © Grand Duc en ligne

# PUISSANCE 4 CST

MATHÉMATIQUE
4e secondaire

## Un cahier d'apprentissage conçu pour la réussite de l'épreuve unique

Chaque chapitre comprend des exercices de réactivation, de la théorie qui modélise les démarches à réaliser, des exercices gradués, une situation d'application et une situation-problème.

Des sections de consolidation construites à l'image de l'épreuve unique permettent aux élèves de réinvestir les connaissances de plusieurs chapitres avant l'évaluation d'étape.

### Un carnet de révision qui prépare à l'épreuve unique

Cet outil aide les élèves à réaliser leur feuille de notes pour l'épreuve unique grâce à des exercices, des situations d'application et des situations-problèmes qui offrent une révision des notions qu'ils et elles ont vues tout au long de l'année.

**Gratuit à l'achat du cahier**

## Découvrez les compléments idéaux à cette collection.

### Des exercices autocorrigés

Des codes donnent directement accès à des exercices autocorrigés supplémentaires.

### Mon centre numérique

Des outils interactifs illustrent les concepts et les démarches mathématiques pour en faciliter la compréhension par les élèves.

### Des fiches à télécharger

- Des exercices de consolidation
- Des situations de conjecture
- Des évaluations des connaissances
- Des encadrés théoriques réunis pour former un outil de référence modifiable
- Un corrigé-éclair

Des documents d'évaluation et de révision calqués sur le modèle ministériel

- Une évaluation à la fin de chaque étape
- Deux pratiques à l'épreuve unique

CODE PRODUIT 4635PEN
ISBN 978-2-7655-4058-8

www.grandducenligne.com

Éditions Grand Duc
Groupe Éducalivres inc.
InfoService : 1 800 567-3671